

قريّة المربّعات جالى شمعونى

ترجمه للعربية: مارون قعبور, ا.موسى ابوشقاره
مراجعة لغويّة: رنا عبدالله



رياضيات – المرحلة
الابتدائية

نشرة تمّوز 2014 Developed

ترجمت للعربية: 2017-2018 Translated

Supported by The Diane P. & Guilford Glazer Fund of the Jewish
Community Foundation of Los Angeles

© جميع الحقوق محفوظة للمركز الإسرائيلي للتميّز في التربية ولوزارة التربية والتعليم.
يُسمح باستخدام المواد التعليميّة فقط في إطار التعليم بحسب منهج "التميّز 2000". يجب عدم نشر
هذه المواد دون إذنٍ خطّيّ مُسبقٍ، من المركز الإسرائيلي للتميّز في التربية.



قَرِيَةُ المُرَبَّعات

مدخل

في هذا الفصل نعرض على التلاميذ أحجية فيها تحدّ لهم، تُوجَّههم بالتدرّج إلى بحث السؤال وإلى طريقة حلّه. من اسم الفصل نستخلص أن موضوعة الأحجية هي من مجال الهندسة – المُرَبَّعات. سنُفاجأ حين نكتشف أن جزءاً كبيراً من بحث الأحجية ينتمي إلى المجال العدديّ.

التصوُّر الفكريّ

الفعاليّة مُعلَّفة بقصّة إطار، تتحدّث عن ولدين وصلا إلى قرية المُرَبَّعات. أراد الوالدان أن يبينا في فندقٍ في القرية، فيه غرفة مُربّعة الشكل. تبيّن لهما أنهما لكي يبينا في هذه الغرفة، عليهما أن يُقسّماها إلى مُربّعات بعدد الأشخاص الذين سيبيتون فيها.

هذه هي المسألة الهندسيّة المطروحة في الفصل: مُعطي مُربّع، والمطلوب تبليطه بمُرَبَّعات صغيرة. مُربّعات التقسيم لا يُشترط أن تكون متساوية في المساحة، ولا يُسمح بأن تُغطّي بعضها البعض ولو جزئياً، وعليها أن تُغطّي كُلّ المُربّع الكبير وأن لا تتعدّاه. السؤال هو بأيّ كمّيات من المُرَبَّعات يمكن تبليط المُربّع المُعطي وبأيّ كمّيات تكون المهمة مُستحيّلة.

حلّ المسألة مُفاجئ. يمكن تبليط المُربّع المُعطي بكلّ كمّية من المُرَبَّعات باستثناء 2، 3 و 5. نُحاول في الفعاليّة أن نتقدّم مع التلاميذ خطوة خطوة إلى أن يكتشفوا الحلّ. خلال سير عمليّة الاكتشاف سيتمكّن التلاميذ من اكتساب تبصّرات مهمّة ومُفيدة خاصّة بعالم الأعداد.

سير الدرس

- إعرضوا ورقة العرض 1 التي فيها بداية قصّة الإطار وسؤال أوّلي يُثير نقاشاً يُساعد التلاميذ في الامتناع عن الوقوع في أخطاء كتلك التي في ورقة العرض.
- إعرضوا ورقة العرض 2 وفيها مُتابعة للقصّة وسؤال قصير آخر. أجرُوا نقاشاً هنا أيضاً.

- יַעֲרֹצוּ וּרְפָת הָעֲרֹצ 3 הַתִּי פִּיהָ מְתַבְעָה לְלִפְסָה. חֲלָלָא בַּעַד זֶלֶק וְרָעוּ עַל הַתְּלַמִּיד וּרְפָת הַמְּהֵמָה 1 הַתִּי יִטְאַלְבֹּן פִּיהָ בְּתִפְסִים מְרִבַּע מְעֻטָּה עַל 7 וְעַל 17 מְרִבְעָ תְּבַלְטֶה. הַנְּפִישׁ הַנָּה יִזְוֹד הַתְּלַמִּיד בְּאִדּוֹת תְּמַכְנֶהם מִן מְגַבְהֶה הַמְּהֵמָה הַמְּרִכְזִיָּה הַתִּי שְׁעֲרֹצ עֲלֵיהֶם לַחֲפָא.
- יַעֲרֹצוּ וּרְפָת הָעֲרֹצ 4 הַתִּי פִּיהָ אִיבְטָא מְתַבְעָה לְלִפְסָה, וְרָעוּ עַל הַתְּלַמִּיד וּרְפָת הַמְּהֵמָה 2, הַתִּי יִטְאַלְבֹּן פִּיהָ בְּתִפְסִים מְרִבַּע מְעֻטָּה עַל 49, 48 וְ 50 מְרִבְעָ תְּבַלְטֶה. הַנְּפִישׁ הַנָּה קַד יִכּוֹן מְשִׁירָא, מַע מְנַפְשָׁה הַתְּנוּעַ הַוַּסִּיעַ לְחֻלּוֹל הַתִּי יַעֲרֹצָהּ הַתְּלַמִּיד.
- יַעֲרֹצוּ וּרְפָת הָעֲרֹצ 5 – "חֲמִסוֹן וְאַכְרִ", הַתִּי סִיכְתְּשֵׁף פִּיהָ הַתְּלַמִּיד אִנֶּה יִמְכַן תְּפִסִּים מְרִבַּע מְעֻטָּה עַל כָּל עֲדִד מִן הַמְּרִבְעִים הַתִּי תְּבַלְטֶה, אִבְתְּאָא מִן 48 מְרִבְעָ – הַפִּכְרָה הַנָּה הִי "הַלְּאִסְתְּרָא".
- יַעֲרֹצוּ וּרְפָת הָעֲרֹצ 6 – "נְהַיָּה הַלִּפְסָה", הַתִּי סִיכְתְּשֵׁף פִּיהָ הַתְּלַמִּיד הַכֹּמֵל לְלִמְהֵמָה – יִמְכַן תְּפִסִּים כָּל מְרִבַּע עַל כָּל עֲדִד מִן הַמְּרִבְעִים הַתִּי תְּבַלְטֶה אִבְתְּאָא מִן 6, וְאִיבְטָא בְּ 4 מְרִבְעִים.
- פִּי נְהַיָּה הַפְּעֻלִיָּה מְרִפֵּק מְלַחֲפָן. הַמְּלַחֵק הָאוֹל הוּא לְלַמְעַם, וַיַּעֲרֹצ בְּרִהָנָא לְמַדָּא לֹא יִמְכַן תְּבַלִּיט מְרִבַּע בְּוַסְטָה 3 אוֹ 5 מְרִבְעִים. הַמְּלַחֵק הַתְּנַי יַעֲרֹצ וְגַבְהֶה נְזֵר מְחֻלְפָה לְלִמְשָׁלָה הַמְּטְרוּחָה פִּי הַפְּעֻלִיָּה, וּבַתְּאִכִּיד יִמְכַן עֲרֹצ פִּכְרְתָה עַל הַתְּלַמִּיד.

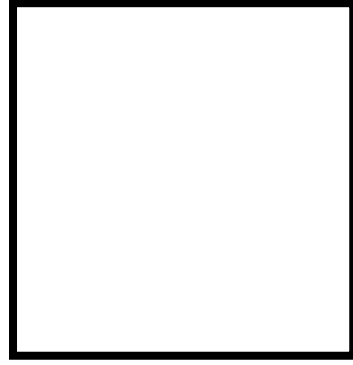
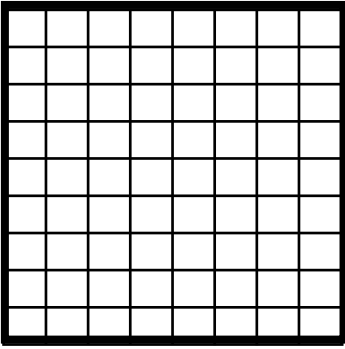
נוֹסִי בְּתַחֲסִיבִים חֲסִיבִים לְהַזֵּה הַפְּסֵל, כָּל חֲסֵה 90 דְּפִיקָה.

אִבְדְּאוּ הַחֲסֵה בְּעֲרֹצ וּרְפָת הָעֲרֹצ 1 הַתִּי פִּיהָ בְּדַיָּה חֲסֵה הָאִפָּר. אִקְרְאוּ הַלִּפְסָה מַע הַתְּלַמִּיד. פִּי הַזֵּה הַוּרְפָת יִוֹגַד שְׁוֹל תְּמִהִידִי. הַזֵּה הַשְׁוֹל סִיבּוּצַח נְקֻטָה מְהֵמָה חֲסֵה בְּחֵל הָאֲחֻיָּה הַמְּרִכְזִיָּה.

قريّة المربّعات

وصل المُتتَزّهان أمير ومُراد إلى قريّة المربّعات، وكان المشهّد الذي انكشفَ أمامهما مُذهلاً. لقد كانت كلّ بُيوت القريّة وحدائقها ولافتاتها مُربّعة الشكل. وفجأة، شاهد الاثنان رجلاً يركب حماراً يجرّ خلفه لوحاً مُربّع الشكل، فسألاه لماذا يفعل ذلك، فأجاب أن عمله يتطلّب منه نقل الأشخاص من مكانٍ إلى آخر في القريّة. طلب المُتتَزّهان من راكب الحمار أن يُقلّهما إلى فندق. في الطريق، كشف لهما راكبُ الحمار أن العملَ المركزيّ في هذه القريّة هو تبليط مُربّعات بمربّعات صغيرة. أعطاهما قلم رصاص وورقة رُسم عليها مُربّع، وطلب منهما أن يُقسّماه إلى مُربّعات. قال مُراد إنه نجح بتقسيمه إلى 72 مُربّعاً. هذا هو الرسم الذي رسمه:

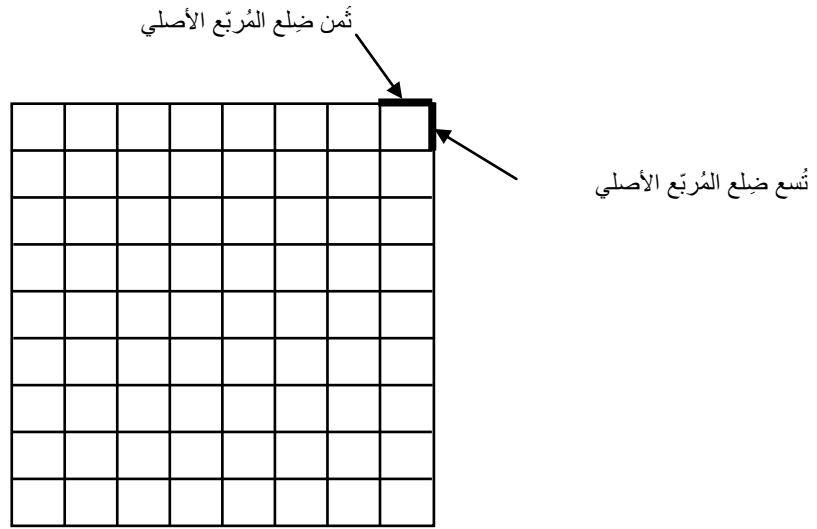
المُربّع قبل التقسيم



هل نجح مُراد فعلاً في تقسيم المُربّع المُعطى وتبليطه بـ 72 مُربّعاً؟

سيرّ الدرس

بعد قراءة السؤال أتيحوا للتلاميذ فرصة للتفكير ولبلورة أفكارهم، وبعد ذلك أصغوا لهم. الأشكال الرباعية التي تُبَلِّط المربع الكبير ليست مربعات وإنما مُسْتطِيلات. تمَعَنوا في الضلعين المؤكّدين وهما ضلعان في البلاطة الموجودة في الزاوية العلوية اليمنى للمربع المعطى.



الضلع العلويّ للمربع الأصلي مُقسَم إلى 8 أقسام متساوية، بينما ضلعه الجانبيّ مُقسَم إلى 9 أقسام متساوية. لذلك فإن الأشكال الرباعية التي تُبَلِّط المربع الأصلي هي مُسْتطِيلات وليست مربعات. على التلاميذ أن يفهموا أنه لو قَسَمَ مُراد كُلّ ضلع إلى نفس العدد من القطع المتساوية، سيحصل على تبليط للمربع الكبير بمربعات صغيرة مُتطابقة.

تابع

استمرّوا في عرض قصّة الإطار في ورقة العرض 2. في آخر ورقة العرض يوجد سؤال تمهيدي آخر للتلاميذ، يجب أيضًا إجراء نقاش في حلّه في الصف.

فندق المربعات

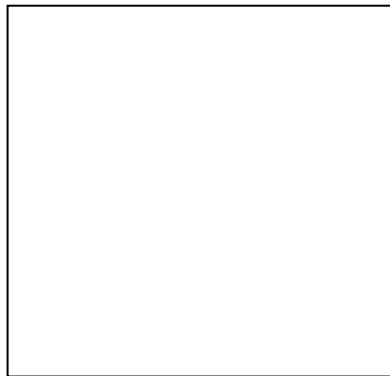
شرح راكب الحمار لمُراد الخطأ الذي وقع فيه، وبعد ذلك أوصله هو وأمير إلى الفندق الوحيد الموجود في القرية.

عندما دخلا الفندق، استقبلهما موظف الاستقبال وهو يلبس نظارات مربعة الشكل، وسألاه إذا كان بإمكانهما الحصول على غرفة.

ابتسم الموظف ابتساماً غريبة لافتة، وأوضح لهما أن هذا الفندق فيه فقط غرفة واحدة كبيرة مربعة الشكل. وأضاف: "باستطاعتكما أن تناما هنا، فقط إذا تمكنتما من تقسيم هذه الغرفة المربعة إلى مربعين، وعندئذ ينام كل واحد منكما في أحد هذين المربعين. لا يشترط أن يتساوى المربعان في المساحة، وفي نفس الوقت لا يُسمح بأن يُغطي أحدهما الآخر (ولو بصورة جزئية)، وعليهما معاً أن يُغطيا بالكامل كل الغرفة المربعة".

قال أمير إنه يستطيع، مثلاً، تبليط المربع بـ 9 مربعات وبـ 16 مربعاً أيضاً، لكنه يعتقد أنه لا توجد طريقة لتبليط مربع بمربعين.

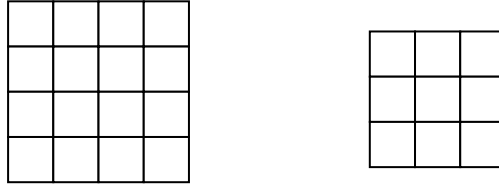
هل صدق أمير؟



סִיר הַדְּרִס

אַסְגּוּא לִי שְׂרוּח הַתְּלַמִּיד. יִדָּא אֲרִדְתִּם, בַּאֲסְטַאעְתְּכֶם תִּמְכִּינֶהֶם מִן תַּעֲלִים הָאֲבֻבֶה עַל הַמְּרִבֵּע הַמּוֹכּוּד בִּי אֲסַפֵּל וּרְפָה הָעֲרֻז.

סֻדַּק אֲמִיר פִּעֻלָּא. בִּי הַבְּדִיאִיָּה, לֹא תוֹכַד אֵיָּה סְעוּבֶה בִּי תַּפְסִים מְרִבֵּע יְלִי 9 מְרִבְעִים, יְלִי 16 מְרִבְעָא וְיְלִי כֻל עֲדָד תְּרִיבִיעִי מִן הַמְּרִבְעִים. תְּרִיבִיעֶה עֵמֶל זֶלֶק הִי אִזְפָּא עֲדָד מְטַסְאוּ מִן הַפְּטַע הָעֲמוּדִיָּה וְהָאֲפֻקִיָּה כַּמָּא בִּי הִדְיִן הַרְסֻמִּין:

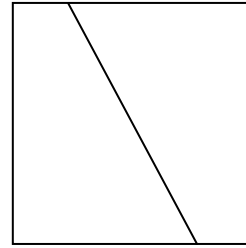


וְלִיש מִן הַסְּעֵב אִישָׁא אֲנִי נִפְחַס לִמָּאָדָּא לֹא יִמְכֵן תַּפְסִים מְרִבֵּע יְלִי מְרִבְעִין. לְכִי נִפְסֵם מְרִבְעָא יְלִי מְרִבְעִין, יִכְבַּד אִזְפָּא חֵטְא וָאֲחַד יִסְבֵּל הַזַּלַּע הָעֲלוּיָּה בַּאֲסַפְלִיָּה אוֹ הַזַּלַּע הָאִימֵן בַּאֲזַלַּע הָאִיֶּסֶר. בִּי הַחֲאֲלִיתִין לֹא נִחְסַל עַל מְרִבְעִין:

וְלִיש הַכֵּזָא אִישָׁא



לִיש הַכֵּזָא



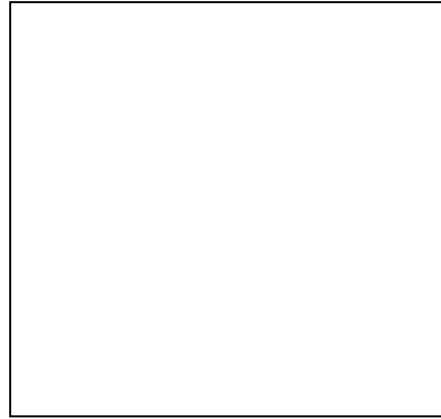
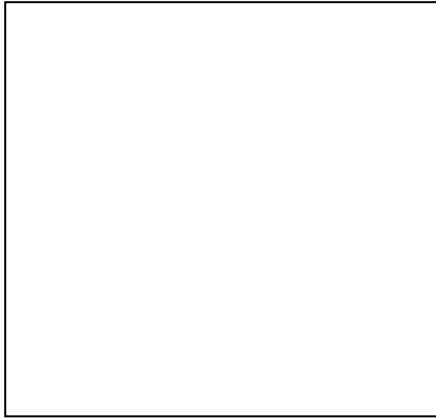
תַּבִּיע

אִסְתַּמְרוּא בִּי קְרִיאָה פְּסֻתָּה הָאֲפָר בִּי וּרְפָה הָעֲרֻז 3, הַתִּי תוֹדִי יְלִי מְהֻמְתִּין לַתְּלַמִּיד. הָאֲתַן הַמְּהֻמְתַּן מּוֹכּוּדָתַן אִישָׁא בִּי וּרְפָה הַמְּהֻמְתָּה 1, הַמְּרִפָּעָה מְבַאֲשֶׂרָה בַּעַד וּרְפָה הָעֲרֻז. יוּבְסִי בָּאֵן יַעֲמֵל הַתְּלַמִּיד בְּאֲזוּאָג יִדָּא רַגְבוּא בִּי זֶלֶק.

مُتَابَعَةُ القِصَّة

قال مُوظف الاستقبال لأمير إنه صدق بقوله، وأضاف: "قد تستغربان إذا علمتما أن أمس نام هنا 7 مُتنزهين، وأول أمس - 17 متنزهاً".
ردّ عليه أمير ومراد معاً: "هذا غير منطقي".

أجاب المُوظف: "هذا بالذات منطقي"، وأكمل: "ولكن يجب أن تتذكروا أن المُرَبَّعات لا يُشترط أن تكون كلها متساوية. تناولوا ورقة وارسموا عليها مُربَّعات، وحاولوا تقسيم أحد هذه المُرَبَّعات إلى 7 مُربَّعات، وتقسيم مُربَّع آخر إلى 17 مُربَّعاً. أنا على ثقة بأنكما سنتجحان بذلك".



7 مُربعات و 17 مُربعا

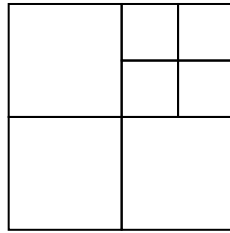
استعينوا بالمربعات المرسومة في هذه الصفحة لتبليط مربع واحد بـ 7 مُربعات وتبليط مربع آخر بـ 17 مُربعا. إذا وجدتم حلاً، حاولوا إيجاد حلول أخرى.

سير الدرس

قبل أن نبحت إدارة هذا القسم من الدرس، نعرض هذه الحلول الممكنة:

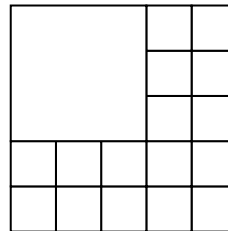
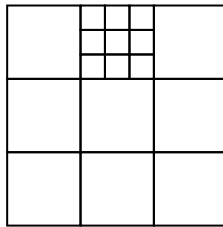
7 مربعات

هنا يوجد حل واحد. كل حل آخر ينتج من هذا الحل بالدوران.

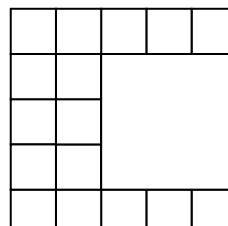
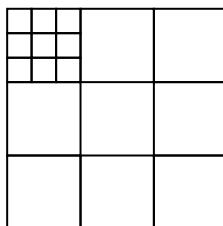
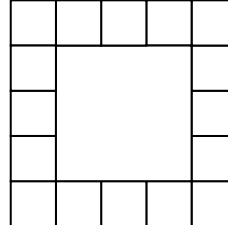
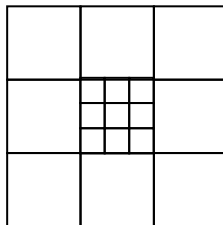


17 مربعا

هذان حلان ممكنان يمكن أن يطرحهما التلاميذ في الصف:



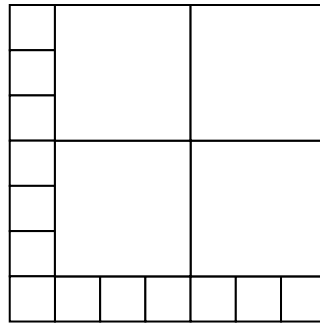
بالطبع يمكن أن نُكوّن من هذين الحلين حلولاً أخرى، تعتمد على نفس المبادئ:



הַמְּשֻׁרָק לַחֲלוּל פִּי הַיָּמֵן הוּא עַל־מָה יִבְדּוּ אֲנִי פִּי כְּלֵי הַמְּרִבְעִים הַמְּרִבְעִים הַבְּדִיָּאָה אֶל־25 מְרִבְעִים מְטַבְּאָה, וְבַעַד זֶה וְחָדָת 9 מְרִבְעִים מִזֶּה הַמְּרִבְעִים הַמְּטַבְּאָה פִּי מְרִבְעִים וָאֶחָד.

הַמְּשֻׁרָק לַחֲלוּל פִּי הַיָּסָרִי הוּא עַל־מָה יִבְדּוּ אֲנִי כְּלֵי הַמְּרִבְעִים הַמְּרִבְעִים הַבְּדִיָּאָה אֶל־9 מְרִבְעִים מְטַבְּאָה. פִּי אֶחָד הַזֶּה הַמְּרִבְעִים הַסְּגִירָה גֵּרִי תַּקְסִימִּי תַּאֲוִי, וְהוּא תַּקְסִימֵה אֶל־9 מְרִבְעִים אֲחֵרִי, אֲסַגֵּר.

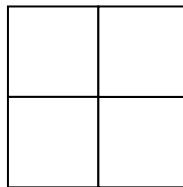
נְשִׁיר אֶל־אֲנִי הֵנָּה חֲלוּלָה אֲחֵרִי לַתַּקְסִימִּי מְרִבְעִים אֶל־17 מְרִבְעִים, מִן הַמְּחֻמֵּל אֲנִי לֹא יַטְרַחָה אֶחָד פִּי סַפְּכֵם, (לֹא חַאגָּה לַעֲרֻשָּׁהּ פִּי זֶה הַמַּרְחֵל). זֶה מִתָּל:



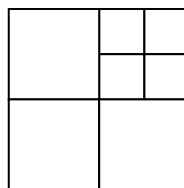
כִּיפ נְדִיר הַדֵּרֶס?

אֲנֵה עֵמֶל הַתַּלְמִיד עַל־הַמְּהֵמָה, תַּגְּוֹלוּ בֵּינֵהֶם וְאֲסַגּוּ אֶל־אֲפִקָּרָהֶם. שְׁגַעוּ הַתַּלְמִידִים הַזֵּינִים וְגִדּוּ חֲלָהּ וָאֶחָד, אֲנִי יִבְחֹתוּ עַן חֲלוּלִים אֲחֵרִי. מִן הַמְּחֻמֵּל אֲנִי יִגֵּד הַתַּלְמִיד חֲלוּלָה תַּחֲלַף עַן תֵּלֵךְ סַנְעַרְשָׁהּ הָאֲנִי, וְזֶה הָאֲמֵר סִיִּתְרִי נַפָּאֶשְׁכֶּם. בַּעַד אֲנִי יִנְתֵּהי הַתַּלְמִיד מִן עֵמֶלֶהֶם, אֲסַנְדַּעוּ אֶל־הַלּוּחַ תַּלְמִידָה לַיַּעֲרֻשׁ חֲלֵה הַחֲסַבַּלְתַּקְסִימִי אֶל־7 מְרִבְעִים. אֲטַלְבוּ מִן זֶה הַתַּלְמִיד אֲנִי יִשְׁרַח כִּיפ תּוּשַׁלֵּל אֶל־זֶה הַחֲלֵה. מִן הַמְּתוֹקֵעַ אֲנִי יַעֲרֻשׁ זֶה הַתַּלְמִיד חֲלֵה הַכִּזָּה:

"פִּי הַבְּדִיָּאָה פְּסַמְתִּי הַמְּרִבְעִים אֶל־אַרְבַּעַת מְרִבְעִים מַתְּסָוִיָּה:"

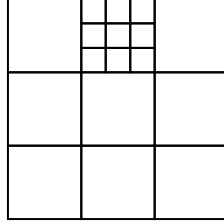


"בַּעַד זֶה פְּסַמְתִּי אֶחָד הַמְּרִבְעִים הָאַרְבַּעַת אֶל־4 מְרִבְעִים אֲסַגֵּר מִנֵּה:"



في هذه المرحلة يُفضّل أن تدعموا فكرة هذا التلميذ. باستطاعتكم أن تقولوا هكذا: "في الحقيقة لقد اكتشفت طريقة. بدأت بالتقسيم إلى أربعة مُربّعات مُتطابقة، وبعد ذلك قَسَمْتِ أَحَدَ هذه المُربّعات الأربعة إلى مُربّعات مُتطابقة أصغر منه". كذلك يوصى بأن تسألوا التلميذ هذ السؤال: "بما أنك بدأتِ بِ 4 مُربّعات ثم قَسَمْتِ واحدًا منها إلى 4 مُربّعات، فلماذا لم تحصل على 8 مُربّعات؟". الجواب عن هذا السؤال سيخدمنا لاحقًا. صحيح أننا بدأنا بِ 4 مُربّعات، لكننا استخدمنا واحدًا منها لكي نُقسّمه إلى 4 مُربّعات أخرى بحيث أصبح عدد المُربّعات الناتج هو في الواقع $4-1+4 = 7$.

باستطاعتكم أن تسألوا التلاميذ إذا استطاع أحدهم أن يجد حلاً آخرَ لمسألة الـ 7 مُربّعات (لن تجدوا لديهم حُلُولًا أخرى). في هذه المرحلة استدعوا إلى اللوح تلميذًا ليعرض حله الخاصّ بالـ 17 مُربّعا. من المُمكن أثناء تجوّلكم في الصف، أن تكونوا رأيتم تلميذًا وجد هذا الحلّ:

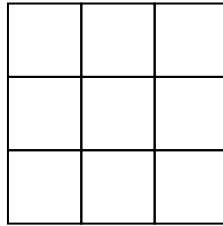


يوصى بأن يكون هذا التلميذ هو أول واحد تستدعونه إلى اللوح. سبب ذلك أن هذا الحلّ يُشبه بطريقة تناوله حلّ مسألة الـ 7 مُربّعات.

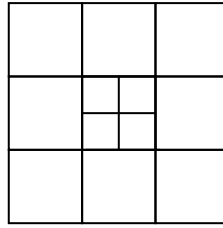
اسألوا التلميذ بماذا يُشبه هذا الحلّ حلّ مسألة الـ 7 مُربّعات.

كما سبق، بدأنا بتقسيم المُربّع إلى مُربّعات مُتطابقة (في هذه الحالة 3×3)، وبعد ذلك قَسَمْنَا أَحَدَ هذه المُربّعات إلى مُربّعات مُتطابقة (في هذه الحالة 3×3). هذه العملية أضافت 8 إلى عدد المُربّعات. الحساب هنا هو $9-1+9 = 17$.

في هذه المرحلة يُفضّل أن نرسم على اللوح المُربّع بالمبني 3×3 :



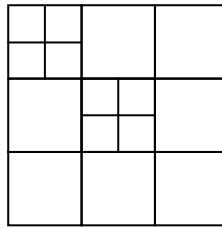
بعد ذلك نسأل التلاميذ هل كان بالإمكان أن نستمرّ في تقسيم المُربّعات الصغيرة إلى 4 مُربّعات أصغر بالمبني 2×2 (كم فعلنا في حلّ مسألة الـ 7 مُربّعات):



הזו המרחל האולו:

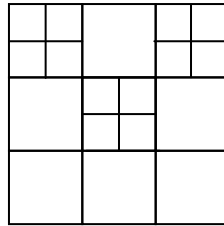
הזו העמליו רפעת עע המרבעט מן 9 ל 12. ולآن נָפְסָם מְרִבָּעָא סַגְבִּירָא אַחַר ל 9 מְרִבָּעִים בַּמְבְּנִי

:2x2



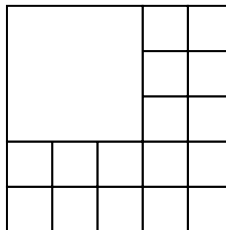
ארַתְפַּע עע המרבעט מן 12 ל 15. התפסוּם התלוי סוּרְפַע עע המרבעט ל 18, ולזלכ לן נסוּל

ל 17:

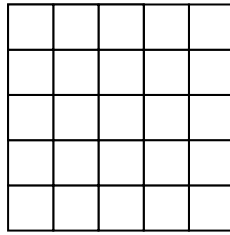


סכוּח אָנָא לִם נָסוּל ל 17 מְרִבָּעָא, לכֵּן התלמיז הָנָא תַעֲלְמוּ בַּתְאָכִיד פְּרִיָּהּ תַפְכִּיר מְהֵמָה. לַחֲפָא סנרוּ כוּפ לְיִמְכְנָא אָן נְטוֹר פְּרִיָּהּ התפכִּיר הזו בסורה מנהגוּה.

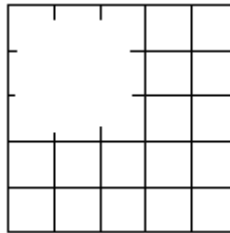
פּוּ הזו המרחל בַּסְטַעַתְכֶם אָן תַסְדְּעוּ ל 17 מְרִבָּעִים לַעֲרִיזָא לַעֲרִיזָא חָלָא אַחַר לַתְפַּסִּים הַמְרִבָּע ל 17 מְרִבָּעָא. תְּשִׁיר תַגְרִבְתָּנָא ל 17 מְרִבָּעִים אָן הזו הַחֲלָ שַׁאֵע:



אַתְּבּוּ מן התלמיז הזו חלָ על 17 מְרִבָּעִים אָן ישרַח כוּפ תוּסַל ל 17 מְרִבָּעִים ל 17 מְרִבָּעִים אָן ישרַח התלמיז תַפְרִיבָּא הַכָּזָא: "פּוּ הבדוּהָ פְּסַמְתּוּ הַמְרִבָּע הַכְּבִיר ל 5x5 מְרִבָּעִים מְנַטְבָּקָה":

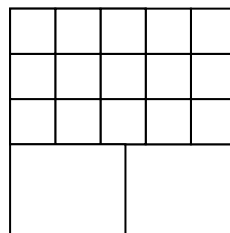


"בעד דלכ וַחַדְּתָּ 9 מְרִבָּעִים אֶלֶּי מְרִבֵּעַ וָאֶחָד" או "וּבַעַד דַּלְכַּ מַּחֹת 9 מְרִבָּעִים":



הָאֵלֶּן אֲטָלְבוּ מִן הַתְּלַמִּיד אֲנִי יִפָּרְנוּ בֵּינָם זֶה הַחֵל וְזֶה הַחֵל וְפָרִיקָה הַסַּבִּיקָה הַלִּי רֵאִינָהּ. הַמְּשֻׁתָּרֵק בֵּינָם הַפָּרִיקָתִים הֵן אֲנִי בְּכֵלֵהֶם נִבְדָּא בְּתַפְסִים הַמְּרִבֵּעַ הַקַּיִר אֶלֶּי מְרִבָּעִים מְתַבָּקָה. אֲמָ הַמְּחֻלָּף הֵן אֲנִי בְּפָרִיקָה הָאוֹלָי תִּפְסֵם הַמְּרִבֵּעַ הָאֲוִלָי אֶלֶּי עֵדָד אֶלֶּל מִן הַמְּרִבָּעִים מִמָּה נִחְתָּגֶה וְנִסְתַּמֵּר בְּ"תַפְסִים תַּנּוּי" יִזְיֵד מִן עֵדָד הַמְּרִבָּעִים, בְּפִי חֵינִי אֲנִי בְּפָרִיקָה הַתַּנּוּיָה תִּפְסֵם הַמְּרִבֵּעַ הָאֲוִלָי אֶלֶּי עֵדָד אֶקְרֵי מִן הַמְּרִבָּעִים מִמָּה נִחְתָּגֶה, וּבַעַד דַּלְכַּ תּוֹחַדְּ עֵדָדָא מִן הַמְּרִבָּעִים אֶלֶּי מְרִבֵּעַ אֶקְרֵי, וּבַדִּלְכַּ תִּנְעֶר עֵדָד הַמְּרִבָּעִים.

מְלַחֶצֶת: חֲלָל הַחֵל וְאֶתְנֵא עֲרֻז הַחֻלוֹל יִמְכֵּן אֲנִי יִפְדֵּם הַתְּלַמִּיד אִפְרָחִים תִּבְדּוּ זָהָרִיָּא עַלִּי אֲנֵיהֶם חֻלוֹל סַחִיכָה לַלְּמַסָּאָה, לְכֵן בְּפִי הַוָּאֵעַם קִסֵּם מִן הַתַּפְסִים לֹא יוֹדֵי אֶלֶּי מְרִבָּעִים. מְתַלָּא, הַתַּפְסִים אֶלֶּי 17 הַכֵּזָא:



בְּפִי מְתַלָּא זֶה הַחֵלָּה מִן הַמְּהֵם אִפְרָא נַפָּשׁ בְּפִי הַסַּף מִן חֲלָלֵה יִתּוֹסַל הַתְּלַמִּיד בְּאֶנְפִּסֵּם אֶלֶּי אֲנִי קִסֵּמָא מִן הָאִשְׁכָּל הַרְּבָעִיָּה הַנֹּתְגָה לֵיסֵת מְרִבָּעִים. דִּכְרוּהֶם חֲלָל הַנַּפָּשׁ בּוֹרְקָה הָעֲרֻז 1 וּבַתַּפְסִים הַלִּי עֲרֻזַּת בְּפִיהֶם, וְהֵן תַּפְסִים יִבְדּוּ זָהָרִיָּא עַלִּי אֲנִי תַּפְסִים אֶלֶּי מְרִבָּעִים, בֵּינָם הֵן בְּפִי הַוָּאֵעַם תַּפְסִים אֶלֶּי מְסֻתְּפִילָת.

תּוֹבֵעַ

פּי הַזֶּה הַמְּרַחֵל אֲנִתְּלוּ אֶלִי וּרְקַת הָעֲרֻז 4, הַתּי תְּקוּד הַתְּלַמִּיד אֶלִי מְהֵמֵ לַאֲפֵתֵה מְוֹגוּדֵה אִישׁוּ אֶלִי
וּרְקַת הַמְּהֵמֵ 2. הַזֶּה הַוּרְקַת יֵגֵב תּוֹזִיעֶהָ עַלִי הַתְּלַמִּיד חַלָּא אַבַּד קְרֵאת וּרְקַת הָעֲרֻז.

مُتَابِعَةُ الْقِصَّةِ (2)

نجح أمير ومُراد فعلاً في تقسيم مُربّع إلى 7 مُربّعات، وتقسيم مُربّع آخر إلى 17 مُربّعا، إلا أن ذلك لم يساعدهما في الحصول على غرفة.

فجأة دخلت إلى الفندق مجموعة كبيرة مؤلّفة من 48 مُتنزّهاً. شرح لهم مُوظّف الاستقبال أنهم يستطيعون المبيت في الفندق، فقط إذا استطاعوا أن يُقسّموا الغرفة إلى 48 مُربّعا، لا يُشترط أن تتساوى في المساحة. وأضاف المُوظّف أنهم إذا لم يتمكنوا من تنفيذ المهمّة، فباستطاعتهم أن يضمّوا إليهم المُتنزّهين أمير ومُراد، ثم يحاولون تقسيم الغرفة إلى 50 مُربّعا. لكنّ مُراد أراد أن يُقدّم خدمةً للجميع، فأخبرهم بأنهم حتى إذا لم يتمكنوا من ذلك، فإنه يقبل أن يبيت في الخارج، في الهواء الطلق، وذلك لعدم وجود أيّة مشكلة في تقسيم المُربّع إلى 49 مُربّعا.

انقسم المُتنزّهون إلى مجموعتين. كانت مهمّة المجموعة الأولى تقسيم المُربّع إلى 50 مُربّعا، وكانت مهمّة الثانية تقسيم المُربّع إلى 48 مُربّعا. عندئذٍ قال أمير: "إنه لأمرٌ شائقٌ معرفة أيّة مجموعة منهما ستنجح في مهمّتها".

48 מרובעًا، 49 مَرَبَّعًا وَ 50 مَرَبَّعًا

استعينوا بالمرَبَّعات المرسومة في هذه الصفحة لتقسيم مَرَبَّع واحد إلى 48 مَرَبَّعًا، وتقسيم مَرَبَّع ثانٍ إلى 49 مَرَبَّعًا وتقسيم مَرَبَّع ثالثٍ إلى 50 مَرَبَّعًا.

إدارة الدرس

أثناء عمل التلاميذ تَجَوَّلُوا بينهم وَأَصْغُوا إلى أفكارهم. تُشير تجربتنا إلى أنكم ستجدون هنا تَنَوُّعًا كبيرًا من الحُلُول. بالنسبة للتلاميذ الذين وصلوا إلى طريقٍ مسدود، باستطاعتكم أن تُذَكِّروهم بالطريقتين اللتين أشرنا إليهما في تحليل ورقة التلميذ الأولى:

الطريقة الأولى

أن يُقسِّموا المُرَبَّع الكبير إلى مُرَبَّعات مُتطابقة عددها أصغر من العدد المطلوب في السؤال، وبعد ذلك يُكَبِّرون عدد المُرَبَّعات بواسطة تقسيم أحد المُرَبَّعات الناتجة في التقسيم الأول إلى مُرَبَّعات مُتطابقة. بالطبع يُمكنهم أن يستمرّوا المرّة تلو المرّة بتقسيم مُرَبَّعات أخرى.

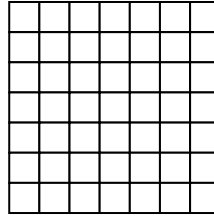
الطريقة الثانية

أن يُقسِّموا المُرَبَّع الكبير إلى مُرَبَّعات مُتطابقة عددها أكبر من العدد المطلوب في السؤال، وبعد ذلك يُصَغِّرون عدد المُرَبَّعات بواسطة توحيد مجموعة من المُرَبَّعات إلى مُرَبَّع واحد أكبر. بالطبع يُمكنهم أن يستمرّوا المرّة تلو المرّة في توحيد مُرَبَّعات أخرى.

شَجَّعوا التلاميذ على التَّوجُّه إلى اللوح لكي يعرضوا حلولهم. نعرض هنا بعض طرائق للحلّ.

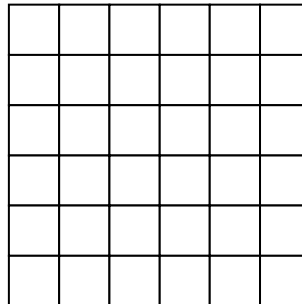
تقسيم المُرَبَّع إلى 49 مُرَبَّعًا

هنا لا توجد مشكلة في التقسيم. نُقسِّم المُرَبَّع إلى 49 مُرَبَّعًا بواسطة المبنى 7×7 :

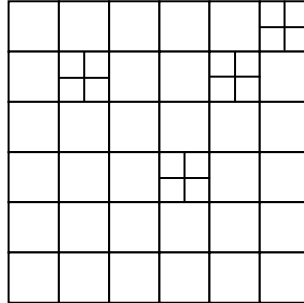


تقسيم المُرَبَّع إلى 48 مُرَبَّعًا

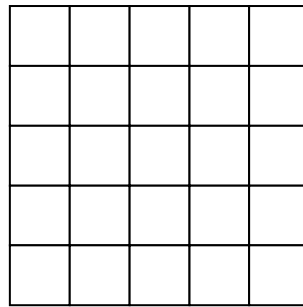
باستطاعة التلميذ أن يعمل بحسب الطريقة الأولى أعلاه بأن يبدأ بتقسيم المُرَبَّع إلى 36 مُرَبَّعًا:



الهدف الآن هو تكبير عدد المربعات من 36 إلى 48، أي بـ 12. كما رأينا سابقًا، كل تقسيم لمربع إلى 4 مربعات متساوية يزيد من عدد المربعات بـ 3، ولذلك يجب أن ننفذ هذه العملية 4 مرات، هكذا مثلاً:

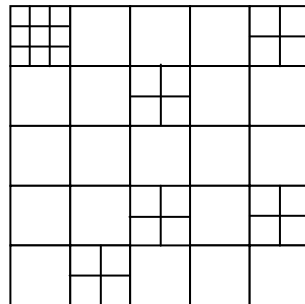


باستطاعة تلميذ آخر أن يعمل أيضًا بحسب الطريقة الأولى، ولكنه يبدأ بتقسيم المربع إلى 25 مربعًا (5×5):



الهدف الآن هو تكبير عدد المربعات بـ 23، من 25 إلى 48. ظاهريًا يبدو أن هناك مشكلة وهي أن العدد 23 لا يُقسَم على 3، ولكن إذا تذكّرنا أن تقسيم المربع إلى 9 مربعات (3×3) يُكَبِّر عدد المربعات بـ 8، تهورن المشكلة.

انتبهوا! في الواقع نحن ننتقل الآن من سؤال هندسي إلى سؤال عددي – يجب جمع الأعداد 3 والأعداد 8 لكي نحصل على 23. هذه طريقة لكي نفعل ذلك: $8+3+3+3+3+3$. معنى ذلك أنه علينا أن نُقسَم مربعًا واحدًا إلى 3×3 وخمسة مربعات إلى 2×2 ، هكذا مثلاً:

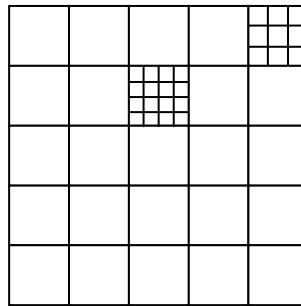


مهم أن ندرك أن التلاميذ الذين يتوصلون إلى حلّ مشابهٍ للحلّ أعلاه، هم على العموم لا يفعلون ذلك

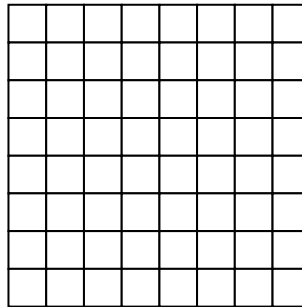
بطريقة تفكير عددية مُرتَّبة كالتالي عرضناها. إنهم يستخدمون بكثرة طريقة التجربة والخطأ – يُكَبِّرون عددَ المُرَبَّعات مرحلة بعد مرحلة على أمل أن يصلوا إلى 48، وأحياناً يكتشفون أنهم تخطَّوا 48.

مُلاحظة

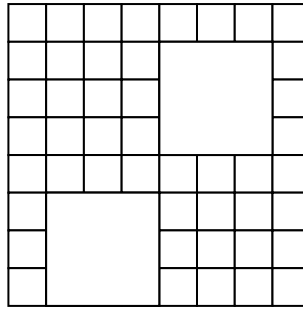
رأينا أن تقسيم مُربَّع إلى 4 أقسام يُكَبِّر عددَ المُرَبَّعات بِـ 3، وأن تقسيم مُربَّع إلى 9 مُرَبَّعات يُكَبِّر عددَ المُرَبَّعات بِـ 8. الآن، إذا قَسَمنا مُربَّعًا إلى 16 مُرَبَّعًا (المبنى 4×4)، نكون قد كَبَّرنا عددَ المُرَبَّعات بِـ 15 (المُرَبَّع المُقسَّم سُحِبَ من العَدِّ وأُضيفَ مكانه 16 آخرين). باستخدام هذه الطريقة باستطاعتنا تكبير عدد المُرَبَّعات من 25 إلى 48 بِسُهولة أكثر. علينا أن نُضيف 23 مُرَبَّعًا، ويمكننا أن نفعل ذلك بِإضافة 15 ثم إضافة 8. معنى ذلك أنه علينا أن نُقسِّم مُرَبَّعًا واحدًا إلى 4×4 ومُرَبَّعًا واحدًا إلى 3×3 .



باستطاعة التلميذ أن يعمل بحسب الطريقة الثانية أيضًا وأن يبدأ بتقسيم أكبر من 48 مُرَبَّعًا، مثلًا 64 مُرَبَّعًا:



في هذه الحالة علينا أن نطرح 16 مُرَبَّعًا. المُشكلة هنا أنه لا يُمكننا أن نفعل ذلك فقط بواسطة توحيد رُباعيَّات من المُرَبَّعات، لأن ذلك سيُصَغِّر عددَ المُرَبَّعات في كُلِّ مرحلة بِـ 3. مُقابل ذلك، يُمكن أن نُوحِّد مرَّتين 9 مُرَبَّعات (كُلُّ توحيدٍ كهذا يُصَغِّر عددَ المُرَبَّعات بِـ 8)، وبذلك نُصَغِّر عددَ المُرَبَّعات بِـ 16 مُرَبَّعًا بالضبط.



מהם אן נעי אנה מן המְחַמֵל אן יגד תלמידז פראנק אָרִי אָלֵל תרטיבֵא. באסתאעֵתהֵם אן יבדאוא באיֵ תִפְסִיֵם קאן, ובעד זלֵק יתִפְדֵמוֹן יואסֵטֵה תִפְסִיֵם וְאֵתוּחִיד. קד תגדוֹן אָפְסֵכֵם אָמאֵם חֻלוֹלִם מְלִפְתֵה גְדָה לְאָנְפֵאֵר.

תִפְסִיֵם מְרִבֵעַ אֵלֵי 50 מְרִבֵעָה

הִפְקֵהֵהֵנּוּ הֵנּוּ מְשִבְהֵה לְתֵלֵק הַתִּי רֵאִינָהּאָהּ פִי חֵלֵ מְסֵאלֵה אֵלֵ 48 מְרִבֵעָה. לא נערז הֵנּוּ רְסוּמָה לְחֻלוֹל, ואִנֵמָה פִקֵט חֵסֵבֵאֵת עֵדִידֵה מן שֵאֵנָהּאָהּ אן תוֹדֵי אֵלֵי הֵזֵה הַרְסוּם. הֵנּוּכָה בֵאלְטִיֵע פֵראֵנֵק אָרִי לְחֵלֵ הַזֵה תִחְדֵי.

הֵאִמְכֵאִידֵה הָאוֹלֵי

3+3+8+36, אֵי אָנָה נִבְדָה בְתִפְסִיֵם הַמְרִבֵעַ הַמְעֵטֵי אֵלֵי 6 × 6, ובעד זלֵק לֵקֵי נֵסֵל אֵלֵי 50 מְרִבֵעָה נִפְסֵם אֵחַד הַמְרִבְעֵאֵת אֵלֵי 3×3 ומְרִבֵעֵיִן אָרִיִן אֵלֵי 2×2.

הֵאִמְכֵאִידֵה הַשֵּנִיֵה

3-3-8-64, אֵי אָנָה נִבְדָה בְתִפְסִיֵם הַמְרִבֵעַ הַמְעֵטֵי אֵלֵי 8×8, ובעד זלֵק לֵקֵי נֵסֵל אֵלֵי 50 מְרִבֵעָה נוֹחֵד מְגוּעֵה מן הַמְרִבְעֵאֵת זֵאת הַמְבִנֵי 3×3 ומְגוּעֵתֵיִן מן הַמְבִנֵי 2×2.

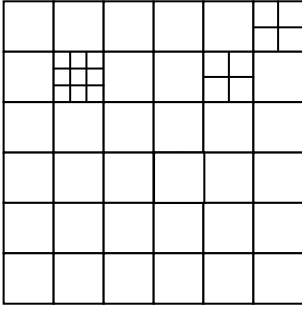
הקטם השני

פי זה הקטם נסתר פי תנול קטת הטר הכטת بالفصل، التي تتناول قرية المربعات والفندق الذي يستضيف فقط عددًا ملاءمًا لتقسيم غرفة مربعة الشكل إلى مربعات. إعرضوا على التلاميذ ورقة العرض 5. في هذه الورقة يوجد تذكير بالطريقة التي أنهينا بها القسم السابق – تقسيم مربع إلى 48، 49 و 50 مربعًا. يلي هذا التذكير سؤال، من شأنه أن يؤدي إلى النقاش المركزي للفصل. أطلبوا من التلاميذ أن يفكروا لبعض الوقت في السؤال.

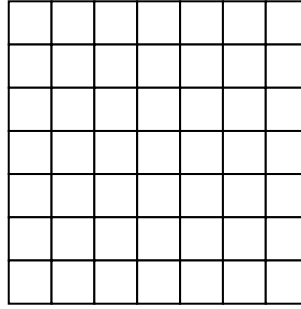
خمسون وأكثر

عرض أمير ومُراد والمنتزّهون الـ 48 على مُوظّف الاستقبال في الفندق،
مُربّعات مُقسّمة إلى 48 و 49 و 50 مُربّعا:

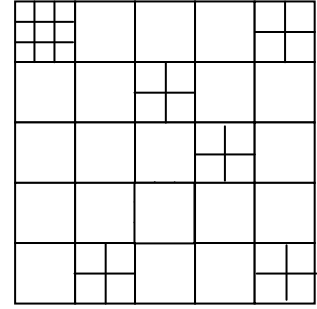
50 مُربّعا



49 مُربّعا

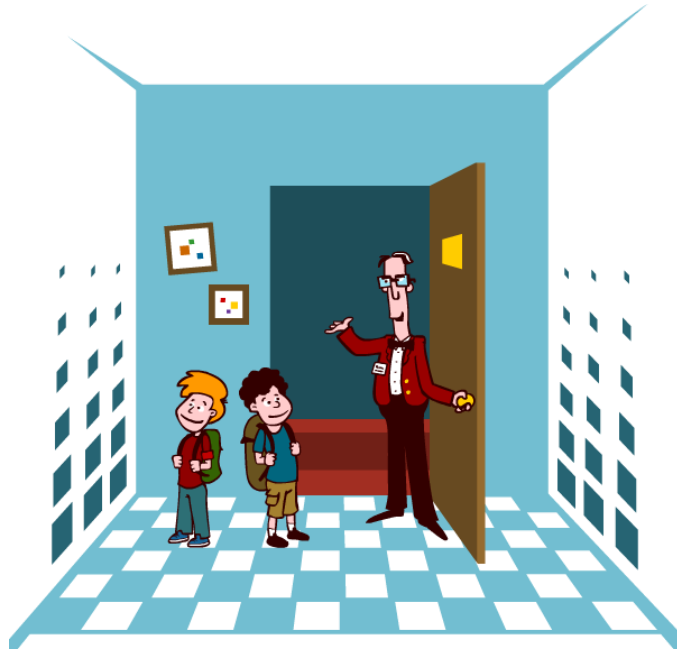


48 مُربّعا



اندفع أديب، وهو أحد المُتنزّهين الـ 48، وقال: "عندما أُمعِنُ النظرَ الآن
في هذه الرسوم، حالاً أرى طريقة لتقسيم مُربّع إلى 51 مُربّعا".

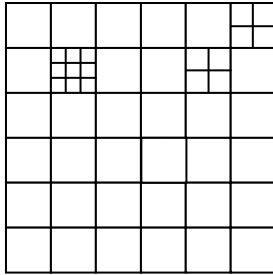
هل بإمكانكم أنتم أيضا رؤية هذا الحلّ السريع؟



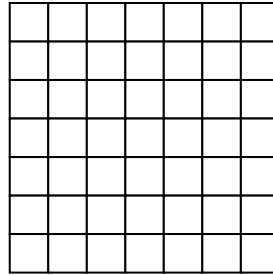
إدارة الدرس

أعطوا التلاميذ فرصة للتفكير، وبعد ذلك أطلبوا منهم أن يعرضوا أفكارهم. حلّ الـ 48 مَرَبَّعًا يُمَكِّنُ من الانتقال الفوري إلى حلّ الـ 51 مَرَبَّعًا. كُلُّ ما يجب فعله هو تقسيم أحد المَرَبَّعات الـ 48 إلى 4 مَرَبَّعات بالمبنى 2×2 . أصبحنا نعلم أن هذه العملية تُضيف 3 مَرَبَّعات. هكذا مثلاً:

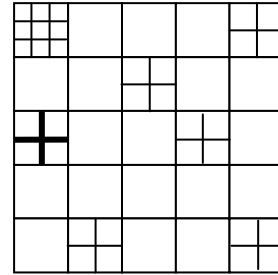
50 مَرَبَّعًا



49 مَرَبَّعًا

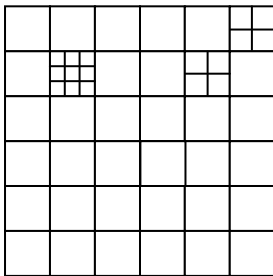


51 مَرَبَّعًا

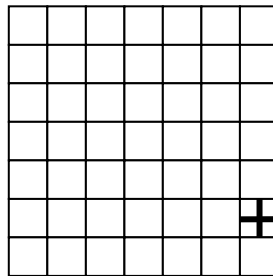


بعد أن يعرض أحد التلاميذ هذا الحلّ، أطلبوا من التلاميذ حالاً أن يعرضوا حللاً لمسألة الـ 52 مَرَبَّعًا. الفكرة هنا مشابهة، ننتقل إلى المَرَبَّع المُقسَّم إلى 49 مَرَبَّعًا ونقسّم أحد مَرَبَّعاته إلى 2×2 :

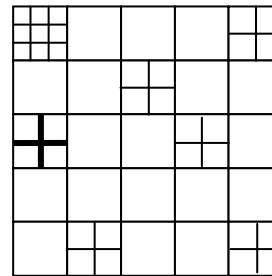
50 مَرَبَّعًا



52 مَرَبَّعًا

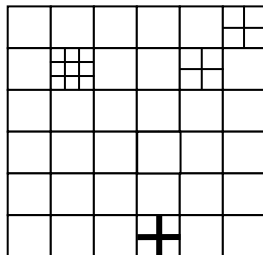


51 مَرَبَّعًا

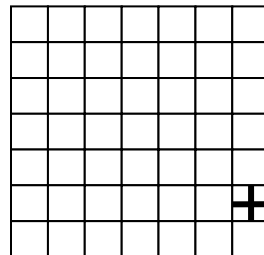


الآن أطلبوا من التلاميذ أن يعرضوا فوراً حللاً لمسألة الـ 53 مَرَبَّعًا. هذا أحد الخُلول:

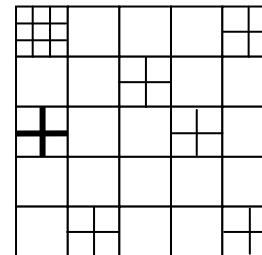
53 مَرَبَّعًا



52 مَرَبَّعًا

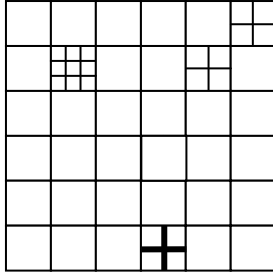


51 مَرَبَّعًا

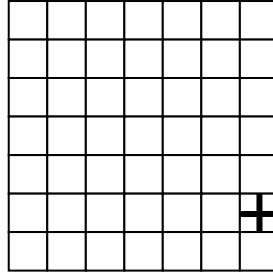


אלן אָפְּלְבוּא מֵנֵהם אִישׁוּ אֲנִי יַעֲרֻצוּ חֲלָא לְמַסְאֵלָה אֶל 54 מְרִבְעָא. הֵנָּה נִרְגַע אֶל הָרִשֵׁם הָאִישֵׁר וְנִקְסַם וְאֶחָדָא מִן מְרִבְעָתֵה אֶל 2×2 :

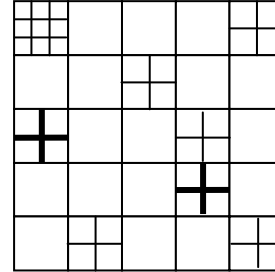
53 מְרִבְעָא



52 מְרִבְעָא



54 מְרִבְעָא



פִּי הַזֶּה הַמְּרַחֵל יֻמְכֵן אֲנִי נִזְלֵב מִן הַתְּלַמִּיד אֲנִי יַעֲרֻצוּ אֶסְתַּנְתַּגְּהֵם מִן פְּרִיָּתָה הַעֲמַלָּה אֲתִמְדְּנָהּ. אֶסְתַּנְתַּגְּ הוּא אֲנָּה בְּזֵה פְּרִיָּתָה בְּרֵהָנָּה אֲנִי יֻמְכֵן תְּקַסִּים כָּל מְרִבְעִי אֶל כָּל עֵדִי שְׂחִיחַ מִן הַמְּרִבְעָת הוּא אֲכֻרָא אוֹ יִסְאוּי 48. לְהַזֶּה אֶסְתַּנְתַּגְּ עֲמֻק רִיבּוּסִי כִּבִּיר. פְּרִיָּתָה הַבְּרֵהָן אֲתִי אֶסְתַּמְנָהּ תִּסְמֵי "אֶסְתַּקְרָא". אֲתִבְּנָה שִׁחָה אֶדְעָא פִּי תְּקַסִּים אֶל 48 מְרִבְעָא, אֶל 49 מְרִבְעָא וְאֶל 50 מְרִבְעָא, וְבִינָּה אִישׁוּ כִּיפִי יֻמְכֵן אֶסְתַּדְּאָם כָּל וְאֶחָדִי מִן הַזֶּה תְּקַסִּים לְכִי נַחֲסַל אֶל תְּקַסִּים אַחֵר פִּי עֵדִי הַמְּרִבְעָת אֲכֻרָא בִּ3. רֵאִינָּה אֲנִי בְּאוּסָטָה הַזֶּה פְּרִיָּתָה יֻמְכֵן אֲנִי נִפְהֵם לְמַדָּא נִסְתַּיֵּעַ אֲנִי נִסִּיל אֶל תְּקַסִּים בְּכָל עֵדִי מִן הַמְּרִבְעָת אֶבְתֵּאָא מִן 48.

תַּבִּיעַ

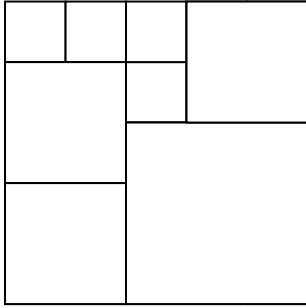
אלן אֶעֲרֻצוּ אֶל הַתְּלַמִּיד וּרְפָה הָעֲרֻז 6 אֲתִי פִּיּהָ תְּלַתֵּה מְרִבְעָת. אֶחָד הַמְּרִבְעָת מְקַסֵּם אֶל 6 מְרִבְעָת, הַתְּנִי אֶל 7 מְרִבְעָת וְהַתְּלַתֵּ אֶל 8 מְרִבְעָת. וּרְפָה הָעֲרֻז הַזֶּה תִּנְהֵי הַפְּסַל וְתִקְוֹדָנָּה אֶל אֶסְתַּנְתַּגְּ הַנְּהַאִי הַאֲחַסַּב בְּתְּקַסִּים הַמְּרִבְעִי. כִּבִּדִּיל, בְּאֶסְתַּעַתְּכֵם אֲנִי תְּפְּלְבוּא פִּי הַבְּדִיאָה מִן הַתְּלַמִּיד אֲנִי יִקְסַמוּ הַמְּרִבְעִי הָאֲשִׁלִּי אֶל 6, 7 וְ 8 מְרִבְעָת (סִבִּק אֲנִי תְּנַוְּלָנָּה תְּקַסִּים אֶל 7) וְבַעַד זֶה פְּקַט תַּעֲרֻצוּן וּרְפָה הָעֲרֻז.

אָפְּלְבוּא מִן הַתְּלַמִּיד אֲנִי יִפְקְרוּ בְּזַע דְּקַאֲקִי פִּי הַזֶּה הַסְּוֵאל וְאֲנִי יַעֲרֻצוּ אֶפְקָרֵהֵם.

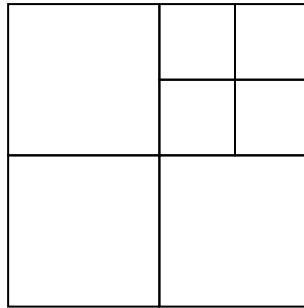
نهاية القصة

دبّ الحماسُ بمُوظف الاستقبال بعد أن شرح له المُتَنزّهون أنه بواسطة تقسيم المربّعات إلى 48، 49 و 50 مربّعات، يُمكن أن نفهم لماذا يُمكن تقسيم مُربّع إلى أيّ عددٍ صحيحٍ من المربّعات، سواءً كان أكبرَ أو يساوي 48. أخرج مُوظف الاستقبال من الدُرج ورقة عليها هذه الرسوم:

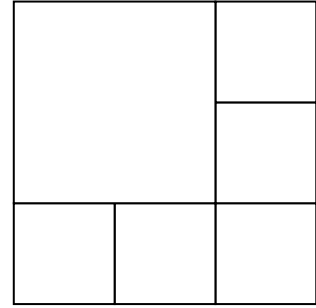
8 مربّعات



7 مربّعات



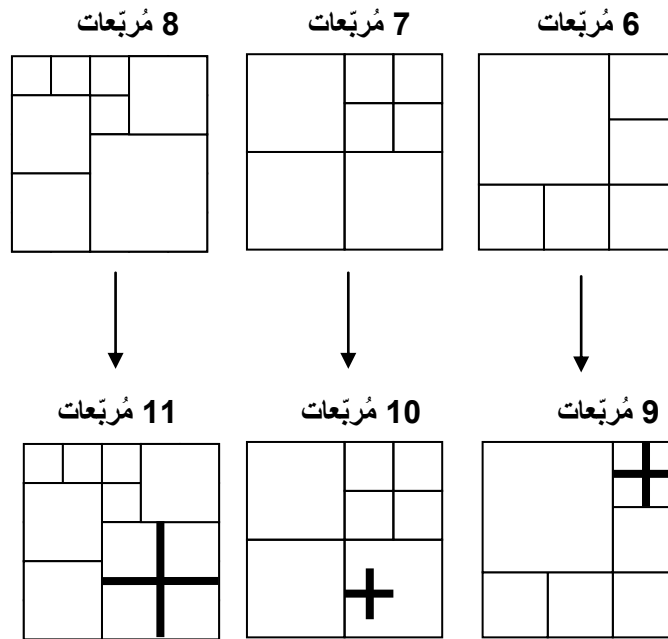
6 مربّعات



ثم قال: "من المؤكّد أنكم الآن تُدركون أنه يُمكن تقسيم مُربّع إلى أيّ عددٍ صحيحٍ من المربّعات من 6 فصاعداً"، وأضاف: "رأينا أيضاً أنه يُمكن تقسيم مُربّع إلى 4 مربّعات. لكن لم ينجح أحد في تقسيم المُربّع إلى 2 أو 3 أو 5 مربّعات، إذ باءت كلّ المحاولات بالفشل. فما رأيكم، هل هناك طريقة لتقسيم مُربّع إلى 3 أو 5 مربّعات؟".

إدارة الدرس

כּמא ראינא מן קבּל, תּפּסִימּ הַמְּרִבָּעִי אֶלִי 49, 48 וּ 50 מְרִבָּעָא יוֹדֵד אֲנֵה בַאִמְכָאן תּפּסִימּ הַמְּרִבָּעִי אֶלִי כֻלּ עֲדִד מן הַמְּרִבָּעַת אֲבִתְדֵאָא מן 48. בּפּרִיקָה מְשַׁבְּהָה, תּפּסִימּ הַמְּרִבָּעִי אֶלִי 6, 7 וּ 8 מְרִבָּעַת יוֹדֵד אֲנֵה בַאִמְכָאן תּפּסִימּ הַמְּרִבָּעִי אֶלִי כֻלּ עֲדִד מן הַמְּרִבָּעַת אֲבִתְדֵאָא 6. הַזֶּה מִתָּאֵל לַאֲנִתְקָאֵל אֶלִי תּפּסִימּ הַמְּרִבָּעִי אֶלִי 9, 10 וּ 11 מְרִבָּעָא¹.



כֻלּ מְחֻאֲוֹלֹת תּפּסִימּ הַמְּרִבָּעִי אֶלִי 3 אוּ אֶלִי 5 מְרִבָּעַת מְסִיבֵרְהָא הַפּשֵׁל. סִיחֻאֲוֹל הַתּלָמִידִים פּעֵל דִּלְכָא לִבְזַע דִּקָּאִיק וּלֵן יִנְכַחֻוּ (הַמְּלֻחֵק 1 פּי אַחַר הַפּוּסֵל יַחְתּוּי אֶלִי בְּרֵהָאֵן לִסְבִיב עֲדִם וְגֻדֵד חֵלּ לְהֵאֲתִיב הַמְּהֵמְתִיב. הַבְּרֵהָאֵן מְעַד לְמַעֲלָמִיב, לֵאֲנֵה מְרַכֵּב בַּאֲנִסְבָּה לַתּלָמִידִים פּי מַדְרָסָה אֲבִתְדֵאִיקָה). אֲגַמְלוּ הַדְרַס בְּאֵן תּפּוֹלוּ לַתּלָמִידִים אִנְהֵם פּי הַזֶּה הַדְרַס אֲכִתְשֻׁפּוּ אֲנֵה יִמְכֵן תּפּסִימּ מְרִבָּעִי אֶלִי כֻלּ עֲדִדִים סְחִיח מן הַמְּרִבָּעַת בַּאֲסִתְנֵאָא אֲעֻדָּא 2, 3 אוּ 5.

הַמְּחֻק 2 פּי אַחַר הַפּוּסֵל יַחְתּוּי אֶלִי תּוּסִיעַ לְמַעֲלָמִיב, נַעֲרֻז פּיֵה וּגְהֵה נִזְר מְחֻתְלָפָה לַתּנְאוּל הַמְּסֻאֵלָה הַתּי רַאפְתְּנָא פּי הַפְּעֻאִיקָה.

¹ נְשִׁיר אֶלִי אֲנֵה בְּהַזֶּה הַפּרִיקָה בַּאֲסִתְפּאֲעֵתָא הַתּעִימִים וּפּרַח חֻאֲרִזְמִיקָה לְכֻלּ עֲדִד אֲכִיר מן 6, וּדִלְכָא בְּחֻס הַבָּאִיקִי פּי חִסְמָה הַעֲדִד הַמְּטּוּב אֶלִי 3. מִתָּאֵל, אִזָּא כָאן הַעֲדִד הַמְּטּוּב הוּ 85, אִיבַן הַבָּאִיקִי מן חִסְמֵתֵה אֶלִי 3 הוּ 1. נִבְדָּא בַּאֲמְרִבָּעִי הַמְּסֻמּ אֶלִי 7, לֵאֲנֵה יִעֲטִי אִיבַזָּא הַבָּאִיקִי 1 עֲנֵד חִסְמֵתֵה אֶלִי 3. תּוּ מְחֻסֵּם פּיֵה מְרִבָּעַתִים בְּעֵדֵד הַמְּרָאֵת הַלָּזְמָה, אֲעֻמָּא בְּאֵן כֻלּ תּפּסִימּ יִזְבִּיפּ 3 מְרִבָּעַתִים.

إجمال

هذا الفصل يقوّد التلاميذ بالتوازي إلى بضعة مسارات. المسار الأول هو الانتقال من الهندسة إلى الحساب – مثلاً، مهمّة تقسيم المربع إلى 50 مربّعاً تحوّلت إلى مهمّة الوصول من 36 إلى 50 بواسطة إضافة أعداد من 3 وأعداد من 8 فقط. وهناك مسارٌ آخر في الفصل هو التعميم – وهو الانتقال من إثبات عددٍ صغيرٍ ومحدودٍ من الحالات إلى إثبات عددٍ لا نهائيٍّ من الحالات الممكنة، ربما باستثناء عددٍ صغيرٍ من الحالات الشاذّة (أثبتنا أنه يمكن تبليط كلّ مربعٍ بكُلِّ عددٍ صحيحٍ من المربّعات باستثناء 2, 3 و 5).

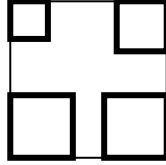
التعميم هو حجر الزاوية في الرياضيات، وهو مُركَّبٌ مهمٌّ في أصل مفهوم البرهان. الطريقة التي عرضناها في سياق الفصل اعتمدت على بدايات طريقة برهان في الرياضيات تُسمّى الاستقراء، التي تُعلّم في مراحل مُتقدّمة من تعليم الرياضيات. نرجو أن يسهم عملنا هذا في مُساعدة التلاميذ على فهم وتدويت مفاهيم مُتقدّمة في الرياضيات.

المُلحق 1: لماذا لا يُمكن تبليط مُربّع بـ 3 أو بـ 5 مُربّعات

البراهين التي سنقدّمها هنا هي بمستوى أعلى بكثير من مستوى الغالبية المطلقة لتلاميذ في صفوف الخامس والسادس، وهي مُعدّة للمعلم.

3 مُربّعات

لنتمّعن في الزوايا الأربع للمُربّع الذي نريد أن نُبلّطه بواسطة 3 مُربّعات أصغر منه. كلُّ زاوية من هذه الزوايا يجب أن تكون مُغطّاة بمُربّع تبليط. هذا مثال لمُربّع بلّطت كلُّ زاوية فيه بمُربّع آخر:

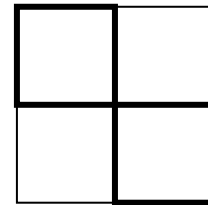
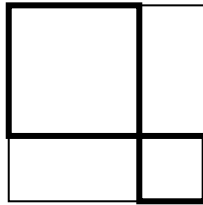


ولكن انتبهوا! بحوزتنا فقط 3 مُربّعات، ولذلك اثنتان من هذه الزوايا يجب أن تكون مُبلّطتين بنفس المُربّع. المُشكلة هي أن المُربّع الوحيد الذي يُمكنه أن يُعطّي هاتين الزاويتين هو المُربّع الأصلي، الذي علينا أن نُبلّطه بثلاثة مُربّعات أصغر منه.

نستنتج من ذلك أنه لا توجد طريقة لتبليط مُربّع بـ 3 مُربّعات.

5 مُربّعات

هذه الحالة أكثر تَركيبًا من سابقتها. نبدأ كما من قبل. كلُّ زاوية من زوايا المُربّع المُعطى يجب أن تكون مُغطّاة بمُربّع آخر (وإلا، كما رأينا سابقًا، فإن المُربّع الوحيد الذي يُمكنه أن يُعطّي أكثر من زاوية واحدة هو المُربّع الذي نريد أن نُبلّطه). تمعّنوا مرّةً أخرى في الحالة المرسومة في القسم السابق من البرهان. لا يُمكن للتبليط المُكوّن من 5 مُربّعات، أن تكون كلُّ المُربّعات الأربعة التي تُغطّي الزوايا مُتباعِدة (لا تتصل بضلع أو برأس) لأن المساحة المُتبقية للمُربّع الخامس ليست مُربّعا! لنفرض اللحظة أن المُربّعين في زاويتين مُتقابلتين يتصلان برأس. توجد حالتان - أن يكون هذان المُربّعان مُتساويين أو مُختلفين في القياس:

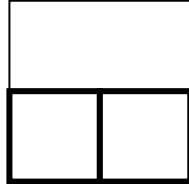


الحالة ب - المُربّعان مُختلفان في القياس: - واضح أنه لا توجد تنمّة تُمكننا من التبليط بـ 5 مُربّعات - القسم المُتبقّي للتبليط مُركّب من مُستطيلين - حيث نستطيع "في أحسن الحالات" أن نُبلّط كل واحدٍ منهما بمُربّعين.

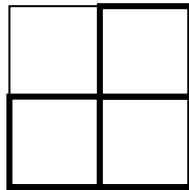
الحالة أ - المُربّعان مُتساويان: أحد المُربّعين الموجودين في الزاويتين المُتقابلتين (اليمنى العلوية واليسرى السفلية) يجب أن يكون مُقسّمًا إلى مُربّعين، ورأينا أن ذلك غير مُمكن.

במה שֶׁן הַמְּרִבָּעִים הַמֻּתְּקָבְלִים לֹא יִמְכָּן אֲנִי שֶׁיִּשְׁתַּרְכָּא בְּקַטְעָה עַל־צִלְעַ מְשֻׁתָּרֵק (לֹאֲנֵה עַנְדֻּזְּ סִיכּוֹן אֲחֻדְהֵמָא מְסֻתְּפִילָא), תִּבְקֵי עֲלֵינָא אֲנִי נִפְחֵסַּ חֹלָה הַתִּי בִּיהֵא הַמְּרִבָּעִים יֻעֲטָיִים זַוְיֹתִים מְגַוְרִיתִים יִתְּסַלֵּן בִּבְעֻזְהֵמָא בְּצִלְעַ מְשֻׁתָּרֵק אֲוֹ בְּקַטְעָה מְשֻׁתָּרֵקָה. הֵנָּה אִיבְּזָא יִבְּיֵא אֲנִי נִפְחֵסַּ חֹלָתִים: הֵזֵאן הַמְּרִבָּעִים מְתַסְּוִיִּים אֲוֹ מְחֻתְּלָפֵן בִּי הַקִּיָּס.

הַחֹלָה א – הַמְּרִבָּעִים מְתַסְּוִיִּים

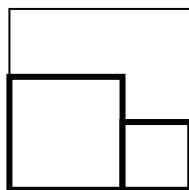


תִּבְקֵי עֲלֵינָא אֲנִי נֻקְסַם הַמְּסֻתְּפִיל הַעֲלּוּיִי אֶל־יְלֵי שְׁלֹשֶׁת מְרִבָּעִים. כָּל־זַוְיָה מִן זַוְיֵי הַזֶּה הַמְּסֻתְּפִיל הָאֲרֻבַּע יִבְּיֵא אֲנִי תִּכּוֹן מְעֻטָּה בְּאֲחַד הַזֶּה מְרִבָּעִים. וּבִמָּה אֲנֵה תִּבְקֵי לְדֵינָא 3 מְרִבָּעִים בְּקַטְעָה, בִּין זַוְיֹתִים מִן זַוְיֵי הַמְּסֻתְּפִיל יִבְּיֵא אֲנִי תֻּעֲטֵי בְּנִפְס הַמְּרִבָּע. לֹאֲסִי מִן הַשְּׁעֵב אֲנִי נִרְיֵא אֲנִי הַפְּרִיקָה הַוָּחִידָה לְפִעֵל זֶה הִי תְּנִיבִית מְרִבָּע מְסָוִי בִּי קִיָּסָתֵה לְלִמְרִבָּעִים הַלְּדִיִּים שִׁבְּקֵי אֲנִי עֲטִינָא בֵּיהֵא הַקְּסִם הַשְּׁפִילִי מִן הַמְּרִבָּע הַמְּעֻטִי:

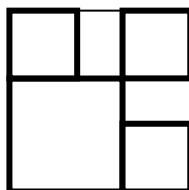


תִּבְקֵי עֲלֵינָא הָאֲנִי אֲנִי נִבְּלֵט הַמְּרִבָּע הַמְּתְּבָקִי בִּי הַזַּוְיָה הַעֲלּוּיָה הַיְּסָרִי בְּמְרִבָּעִים, וְלִכְנָא נַעֲלֵם אֲנֵה לֹא תּוֹגַד פְּרִיקָה לְתַבְּלִיט מְרִבָּע בְּמְרִבָּעִים.

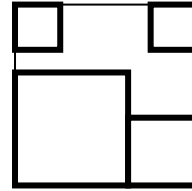
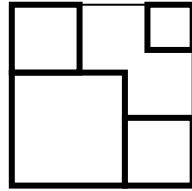
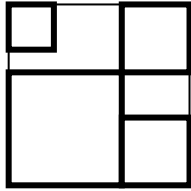
הַחֹלָה ב – הַמְּרִבָּעִים מְחֻתְּלָפֵן בִּי הַקִּיָּס



לְנִתְמַעַן הָאֲנִי בִּי הַזַּוְיֹתִים הַעֲלּוּיִים לְלִמְרִבָּע הַקִּבֵּר הַלְּתִים מֵאֲזַלְתָּא עֵיִר מְבִלְטִים. לֹאֲסִי מִן הַשְּׁעֵב אֲנִי נִסְתַּתֵּג אֲנִי אֲכִיבֵר מְרִבָּע יִמְכָּן אֲנִי יֻעֲטֵי כָּל־זַוְיָה מִנְהֵמָא יִבְּיֵא אֲנִי יִכּוֹן מְסָוִיָא לְלִמְרִבָּע הַשְּׁעִיר הַזֶּה יֻעֲטֵי הַזַּוְיָה הַשְּׁפִילָה הַיְּמִנִי לְלִמְרִבָּע הָאֲשֻׁלִּי. הֵכֵזָא יִבְּדוּ הַתְּבִלִּיט בַּעַד אֲנִי נִסְתַּדֵּם אֲכִיבֵר מְרִבָּעִים מְמַכְּנִים:



יֵדֵן לֹא חֵלַּל לַלְּמִשְׁאֵלָה לְאַן הַקִּסֵּם הַמְּתִבְּקִי לַלְּמִרְבַּע הַחֲמִישִׁי הוּא מִן הַקִּסְמִין מְנַפְּסְלִין, וְלִזְלוֹךְ סִנְחֹוֹל בְּפִרְיָהּ אֲחֵרִי אֲנִי נִגְעֵפִי זֹאוּיָהּ וְאִחַדָּה אוֹ הַזֹּאוּיִתִּין הַעֲלוּיִתִּין בִּי הַמְּרִבַּע הָאֲוִלִּי בְּמִרְבַּע אוֹ בְּמִרְבַּעִין אֲסַעֵר. בִּי הַזֶּה הַחֵלָּה אִיבֻזָּא נִרִי בְּוִזּוֹחַ אֲנִי לֵן נִנְיֵחַ בַּתְּבִלִּיט בִּ5 מְרִבָּעִים.



בִּי כָּל חֵלָּה מִן הַזֶּה הַחֵלָּה הַקִּסֵּם הַמְּתִבְּקִי לַתְּבִלִּיט לִישׁ מְרִבָּעָא.

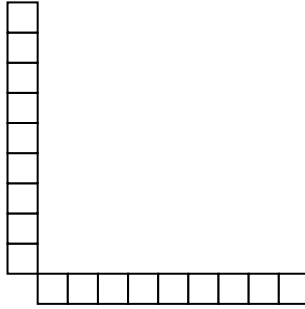
المُلحق 2: وجهة نظر مُختلفة للمسألة

נערוז הנה ברְהאָנָא עלִי מרְחלָתַיִן לַל־דָּעָא בָּאֵנֶה יִמְכֵּן תְּקַסִּימַ כֹּל מְרַבַּע עַלִי אַיִ עֵדִדִּ סְחִיחַ מִן מְרַבָּעַת אַבְתָּאָּ מִן 6 פְּסָעַדָּא, וְאַיְצָנָא עַלִי 4 מְרַבָּעַת. הָאֵתָּאן הֵמָּא מִרְחֻלָּתָאן:
מִרְחֻלָּה אֲוֵלָי: נִבְרֵהֵן הָאֵדָעָא לְכֹל עֵדִדִּ זֻוּגִי מִן מְרַבָּעַת אַבְתָּאָּ מִן 4.

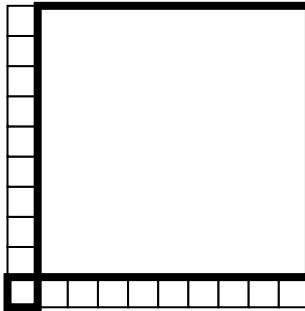
מִרְחֻלָּה הַשֵּׁנִית: נַעֲמֵד עַלִי מִרְחֻלָּה אֲוֵלָי וְנִבְרֵהֵן הָאֵדָעָא לְכֹל עֵדִדִּ פְּרִדִּי מִן מְרַבָּעַת אַבְתָּאָּ מִן 7.

المرحلة الأولى

לְנַפְרַז אֲנָנָא נִרְיֵד אֲן נִקְסַם מְרַבַּע עַלִי 20 מְרַבָּעָא. אַנְתִּבְהוּ! פִּי הַוָּאֵע לָא נִבְדָּא מִן מְרַבַּע נִרְיֵד תְּקַסִּימֵהּ וְאִנְמָא סַנְבִּנִי מְרַבָּעָא מִן 20 מְרַבָּעָא. פִּי הַבְּדִיאָה נֶאֱחַדַּדּ פֻּקֵּט 18 מְרַבָּעָא מִתְּבָאָּ (פִּי הַזֶּה מִרְחֻלָּה "נִתְרַקַּדְּ יָאִנְבָּא" מְרַבָּעִיִן לָא נַעֲרַףּ פִּיאַסָּתִּ כֹּל מִנְהֵמָּא). נִקְסַם הַזֶּה מְרַבָּעַת עַלִי מְגֻוּעָתָּן, כֹּל מְגֻוּעָה מִן 9 מְרַבָּעַת וְנִרְתְּבָהֵמָּא הַכָּזָּא:



לְכִי נַחֲסַל עַלִי מְרַבַּע הַכֶּבֶד תִּבָּקִי עֲלֵינָא אֲן נִזְכִּיףּ מְרַבָּעִיִן – מְרַבַּע פִּי הַזֵּוּגִיהַת הַשֵּׁנִית הַיְסָרִי, הַזֶּה יִטָּאָּבֵק כֹּל מְרַבַּע מִן מְרַבָּעַת הַסָּבִיבָה, וּמְרַבַּע אַחֵר אֲכָבֵר מִנֵּה פִּי הַזֵּוּגִיהַת הַיְמָנִית:



לֵיִס מִן הַסְּעֵב אֲן נַפְהֵם אֲנָנָא, בְּطָרִיףֶהּ מִשָּׁבְהֶהּ, יִמְכֵּן אֲן נִיבְנִי מְרַבָּעָא מִן כֹּל עֵדִדִּ זֻוּגִי מִן מְרַבָּעַת אַבְתָּאָּ מִן 4. "נִתְרַקַּדְּ יָאִנְבָּא" מְרַבָּעִיִן, נִקְסַם בָּאִי מְרַבָּעַת (הַמְּטָאוּבֶהּ פִּי פִיאַסָּתֶהָ) עַלִי מְגֻוּעָתַיִן מְטָאוּבֵינֵי, וְנַעֲמַל בְּחַסְבִּ הַטָּרִיףֶהּ אַעֲלָה.

הַבְּרֵהָן שְׂחִיחַ אִישָׁאִּי בִּי חֵלֶה אֶל 4 מְרִבְעִים. "נִתְרַקַּ גַּנְיָבָא" מְרִבְעִים, וּמִן הַמְּרִבְעִים הָאַחֲרִים נִבְנִי הַזֶּה הַמְּבִנִי:



וְהַיָּן נְצִיפִי הַמְּרִבְעִים הַנֶּאֱחָסִים:



הַמְּרַחֶלֶת הַשֵּׁנִית:

בִּי הַזֶּה הַמְּרַחֶלֶת נֶעֱוֵם בְּעִמְלִית מְשֻׁבְּהֶת לְעִמְלִית הַתִּי קִמְנָא בְּהָ חֵלֶל הַדְּרִס. נֶאֱחָזְ כָּל הַחֻלּוֹל הַתִּי וְגִדְנָהָ הַחֻשָּׁבֶת בְּאֵעֻד הַזְּוִגִית לְהַמְּרִבְעִים, וְנֶחְסֵם בִּי כָּל וָאֶחָד מֵהֶם וְאֶחָד מִן הַמְּרִבְעִים אֶלֶּי 4 מְרִבְעִים בְּהַמְּבִנִי 2×2 . וְכִמָּא תַעֲלֵמָא מִן קִיבֵל, הַזֶּה הַעִמְלִית תִּקְבֵּר עֵדֶד הַמְּרִבְעִים בִּ3. וְהַזֶּה מָא סִיחְדָּת:

- הַמְּרִבְעִי הַמְּחֻסָּם אֶלֶּי 4 מְרִבְעִים סִיבְּחִי מְרִבְעָא מְחֻסָּם אֶלֶּי 7 מְרִבְעִים.
- הַמְּרִבְעִי הַמְּחֻסָּם אֶלֶּי 6 מְרִבְעִים סִיבְּחִי מְרִבְעָא מְחֻסָּם אֶלֶּי 9 מְרִבְעִים.
- הַמְּרִבְעִי הַמְּחֻסָּם אֶלֶּי 8 מְרִבְעִים סִיבְּחִי מְרִבְעָא מְחֻסָּם אֶלֶּי 11 מְרִבְעִים.

עַלִּי הַזֶּה הַנְּחוֹר בִּאִסְטָעֻתָּנָא אֲנִי נֶחְסֵל עַלִּי תַּפְסִימִי לְהַמְּרִבְעִי בְּכָל־עֵדֶד־פְּרִדִּי מִן הַמְּרִבְעִים אִבְתֵּדָא מִן 7. אִזְנֵן, מִן הַמְּרַחֲלִיתִים מַעָא נֶכּוֹן קִדְ בְּרֵהָנָא אֲנִי בִּאִסְטָעֻתָּנָא אֲנִי נֶחְסֵם מְרִבְעָא אֶלֶּי כָּל־עֵדֶד שְׂחִיחַ מִן הַמְּרִבְעִים אִבְתֵּדָא מִן 4, בִּאִסְטָעֻתָּנָא 5.