פיתוחי השולחן העגול

גלי שמעוני, צבי שלם

עריכה: ד"ר אבי פולג

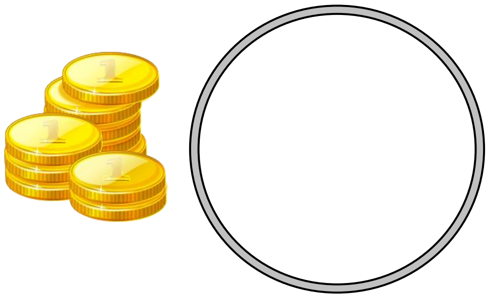
מתמטיקה – יסודי

מהדורת תשע"ו

מבוא

הפעילות שלפנינו מבוססת על החידה הידועה:

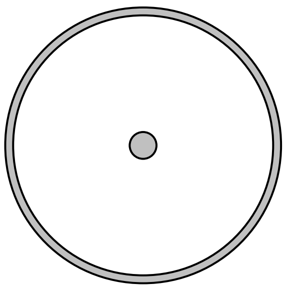
לפניכם שולחן עגול ולצדו מספר גדול מאוד של מטבעות עגולות קטנות. עליכם לשחק משחק בן שני השחקנים - כל שחקן בתורו מניח מטבע אחת על השולחן כך שהמטבע <u>אינה</u> חורגת משטח העיגול של השולחן. השחקן הראשון שאינו מוצא בתורו מקום פנוי על השולחן להניח מטבע, מפסיד במשחק. (אסור למטבע לחפוף בשלמות או במקצת עם המיקום של מטבע שהונחה קודם לכן, אך מותר שתהיה השקה בין המטבעות).



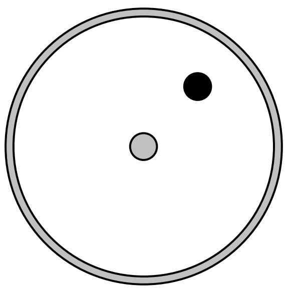
מסתבר שלאחד השחקנים יש דרך לנצח במשחק בכל אחד מן המהלכים של יריבו. המשימה היא לגלות אם השחקן הזה הוא הפותח במשחק או השחקן השני. כמו כן יש לגלות את דרך הפעולה של השחקן הזה.

פתרון

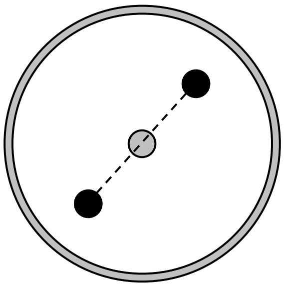
השחקן שבידו האסטרטגיה לניצחון הוא זה הפותח במשחק. במהלך הראשון הוא מניח את המטבע במרכז הלוח – נקודת המרכז של המטבע צריכה להתלכד עם נקודת מרכז השולחן.



נניח שהיריב מניח את המטבע הראשונה שלו במקום הזה:

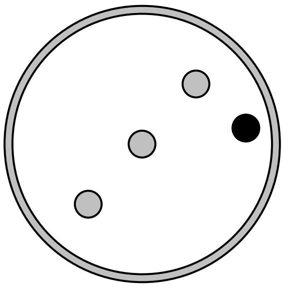


כעת השחקן הראשון מניח מטבע משלו כך שהמטבע במרכז תהיה בדיוק באמצע הקטע המחבר את שתי המטבעות האחרונות שהונחו. אפשר לומר ששתי המטבעות האחרונות שהונחו (צבועות בשחור) הן סימטריות ביחס למטבע שבמרכז הלוח.

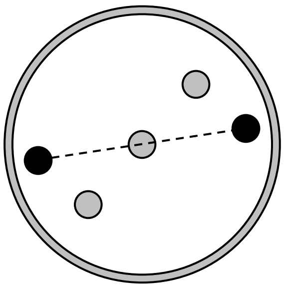


דרך נוספת למהלך התגובה של השחקן הפותח היא לומר שמיקום המטבע שלו מתקבל מן המיקום של מטבע היריב בעת סיבוב הלוח ב- 180^0.

כעת נניח שהשחקן השני מניח את המטבע השנייה שלו כך:



ושוב השחקן הראשון יניח מטבע במקום שהוא סימטרי למקום של היריב ביחס למרכז הלוח:



כך יימשך המשחק עד אשר השחקן שפתח בו ינצח. ההסבר לכך פשוט – כל זוג מהלכים מכסה שני שטחים סימטריים ביחס למרכז הלוח. אם השחקן השני מוצא מקום פנוי להניח מטבע, הרי שהשטח הסימטרי שלו חייב להיות פנוי, וכך גם לשחקן שפתח במשחק יש מקום להניח מטבע. על כן כל עוד לשחקן השני יש מהלך במשחק,

גם לשחקן הראשון יש. כיוון שהלוח אינו אין־סופי, יגיע שלב שבו לא תהיה אפשרות להניח עליו מטבע. זה יקרה בהכרח כשתורו של השחקן השני יהיה לשחק, ולכן הוא יפסיד. בהמשך הפעילות נבהיר שוב את העניין הזה בהמחשה.

חידת השולחן העגול מעניינת ומלמדת, אך אנו מצאנו קושי מסוים בהפעלתה בשיעורי "מצוינות 2000". הבעיה נעוצה בכך שכאשר משחקים את המשחק, קשה מאוד לממש את האסטרטגיה המנצחת כיוון שהסימטרייה דורשת דיוק רב בהנחת המטבעות, וגם מי שמכיר את האסטרטגיה עלול להפסיד במשחק עקב אי־דיוקים אלה.

על כן בפעילות שלפנינו לא ישחקו התלמידים את משחק השולחן העגול, אלא רק משחקים הדומים לו. המשחקים האלה יובילו בדיוק לאותה החשיבה כמו זו שבשולחן העגול, אלא שמרכיב חוסר הדיוק לא יתממש בהם.

נציג כעת את המשחקים. התנסות התלמידים במשחק הראשון צריכה להיות ארוכה כדי לאפשר להם הזדמנות לגלות לבד את אסטרטגיית הניצחון. המשחק השני הוא בעל עיקרון חשיבה דומה לזה הראשון, ולכן סביר שהתלמידים ישחקו בו פחות. עודדו את התלמידים המבקשים לפתור את המשחק הזה רק בתאוריה. המשחק השלישי שונה משני קודמיו – אסטרטגיית הסימטרייה אינה מתממשת בו. התלמידים ייאלצו לחפש פתרונות אחרים יצירתיים. נציין שלא חקרנו לעומק את המשחק הזה, כך שגם לנו לא ידועה אסטרטגיית הניצחון בו.

מהלך הפעילות:

בעמוד הבא יש דף הסבר על כללי המשחק הראשון. התחילו את השיעור בהסברים שבדף. בהמשך משובצים שלושת משחקי הפעילות בזה אחר זה – לכל משחק יש דף משימה ועליו לוחות משחק ומיד אחריו דפי הסבר למורה. בעת השיעור תנו לתלמידים לשחק במשחק הראשון למשך פרק זמן הנראה לכם מתאים, ולאחר מכן דונו בו. פעלו כך גם במשחק השני ולאחר מכן גם במשחק השלישי.

משך הזמן המתאים לפעילות הוא לפחות שיעור אחד בן 90 דקות.

משחק ראשון – לוח 6×6

מהלך המשחק:

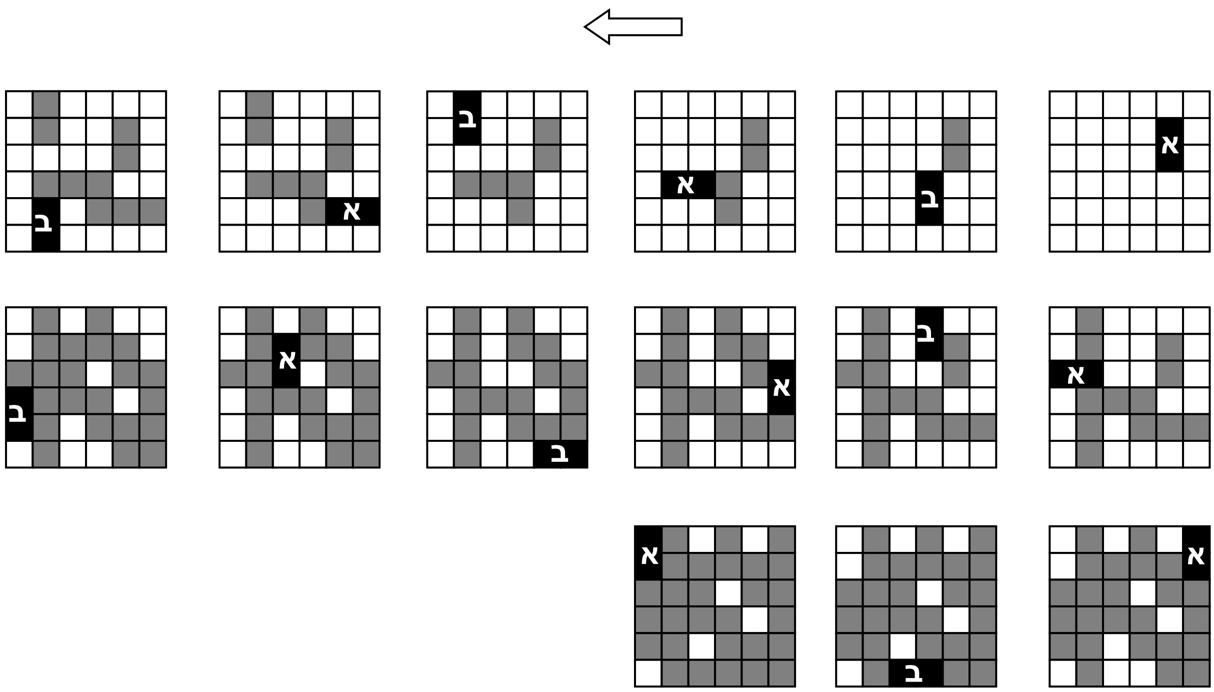
על כל שחקן בתורו להשחיר זוג משבצות צמודות.

ניצחון במשחק:

השחקן האחרון המצליח לבצע מהלך במשחק מנצח.

משחק לדוגמה

להלן משחק המראה כיצד מתמלא הלוח בזוגות של משבצות מושחרות:



לשחקן ב' אין כעת מהלך אפשרי. השחקן שפתח במשחק הוא זה שביצע את המהלך האחרון, ולכן הוא המנצח.

לאחר הסבר קצר כמו זה שלעיל, תנו לתלמידים את דף משימה 1 שבו לוחות למשחק הזה. אפשרו להם לשחק בחופשיות. בזמן שהתלמידים משחקים, עברו ביניהם ובדקו אם גילו אסטרטגיה לניצחון. עודדו אותם לנסות ולמצוא אותה.

דף משימה 1

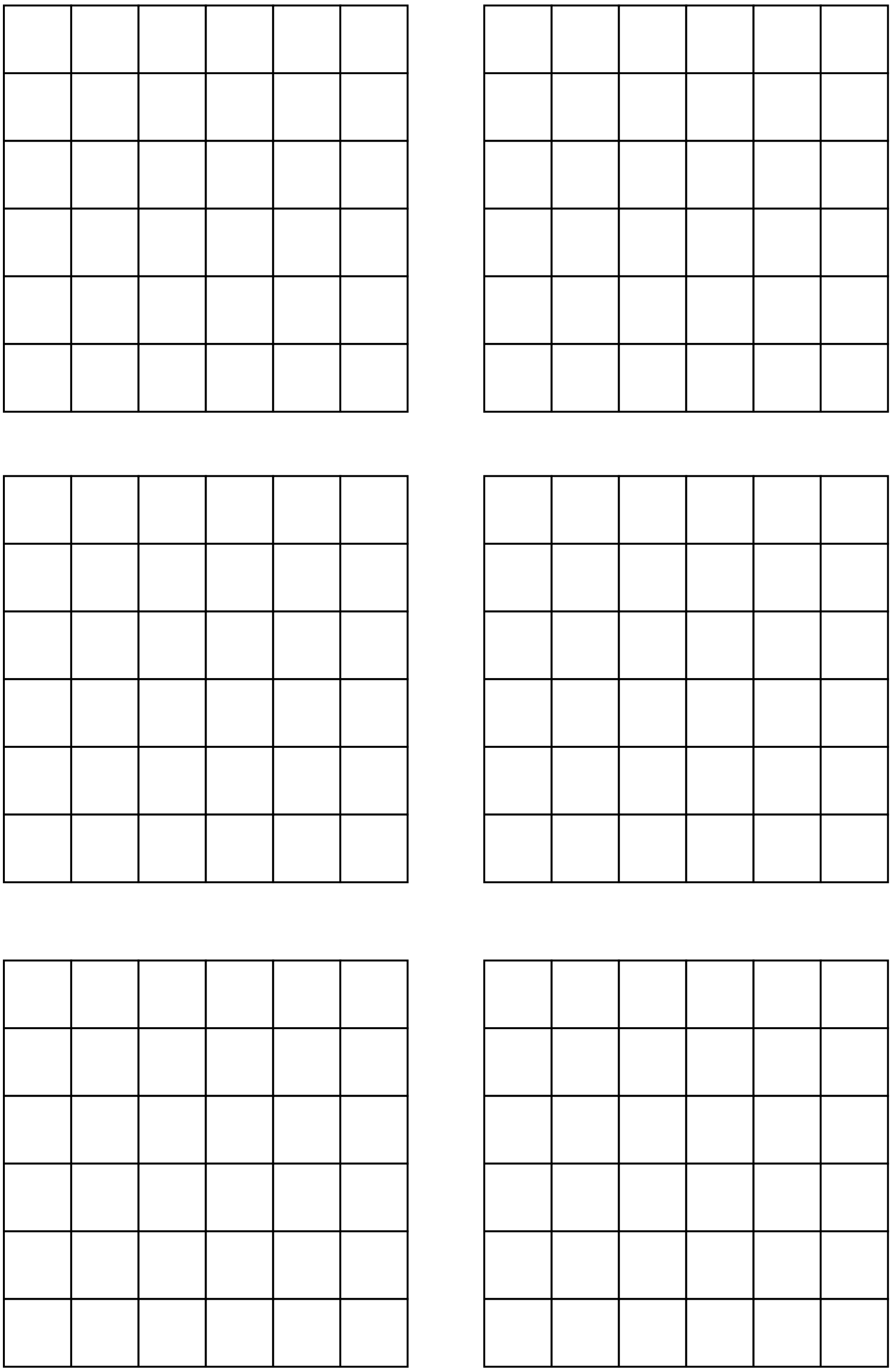
משחק ראשון – לוח 6×6

מהלך המשחק:

על כל שחקן בתורו להשחיר זוג משבצות צמודות.

ניצחון במשחק:

השחקן האחרון המצליח לבצע מהלך במשחק מנצח.

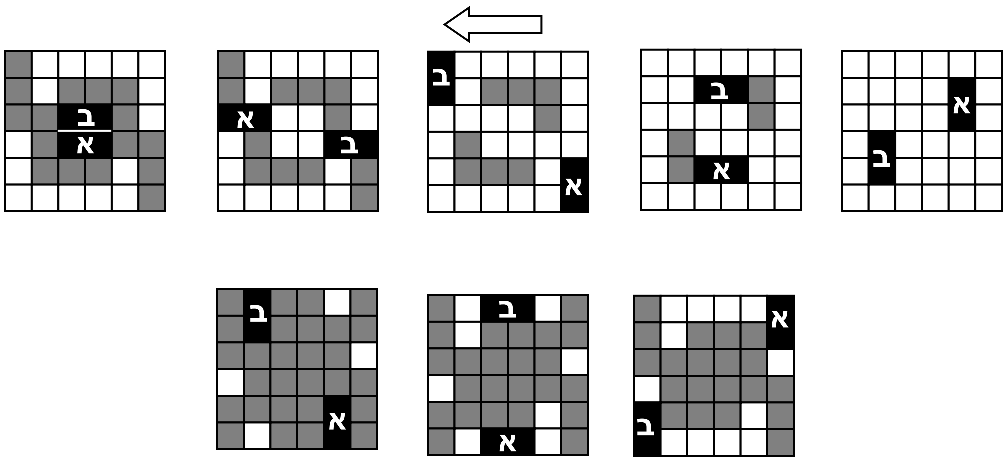


לוח 6×6 – ניתוח המשחק

העניקו לתלמידים זמן סביר לשחק. אל תזרזו אותם. מעניין יהיה לראות אם מישהו מהם יגיע אל אסטרטגיית הניצחון שנפרט כעת.

אסטרטגיית הניצחון במשחק הזה מצויה אצל השחקן שאינו פותח במשחק. כל שעליו לעשות הוא לבצע מהלך בעל סימטרייה סיבובית ב- 180^0 לכל מהלך שמבצע השחקן הראשון.

נציג כאן דוגמה למשחק שבעזרתה יובן מדוע לשחקן הפותח אין סיכוי לנצח את השחקן השני המשתמש באסטרטגיה לעיל. בכל לוח סימנו שני מהלכים (אחד של כל שחקן), כדי להדגיש את הסימטרייה של מהלכי השחקן השני וכדי להמחיש כי כל עוד יש לשחקן א' מהלך אפשרי, הרי שלשחקן ב' יש מהלך תגובה, כיוון שהמיקום הסימטרי לעולם אינו תפוס.



לא קשה להבחין שהמשחק הזה דומה למשחק החידה הידועה שהצגנו במבוא. ההבדל כאן הוא שהשחקן הפותח הוא דווקא השחקן המפסיד, כיוון שאין לו דרך לצבוע במהלך הראשון את "מרכז הלוח", מאחר שהמרכז מורכב מארבע משבצות ולא משתיים.

דונו עם התלמידים בניתוח המשחק, ולאחר מכן חלקו להם את לוח המשחק השני. חוקי המשחק הזה זהים לחוקי המשחק הראשון, אלא שהלוחות בו בגודל 56[a].

בניתוח המשחק נגלה שהמשחק הזה אנלוגי למשחק השולחן העגול מן המבוא.

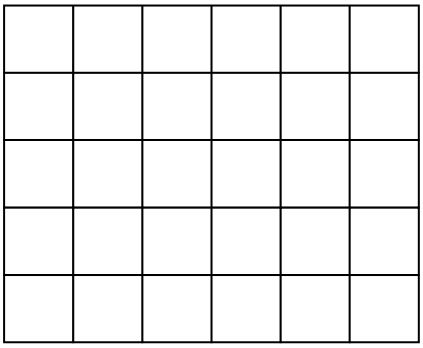
משחק שני – לוח 5×6

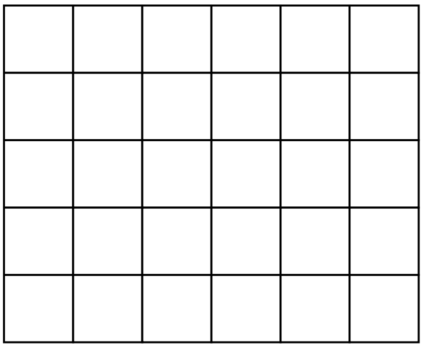
מהלך המשחק:

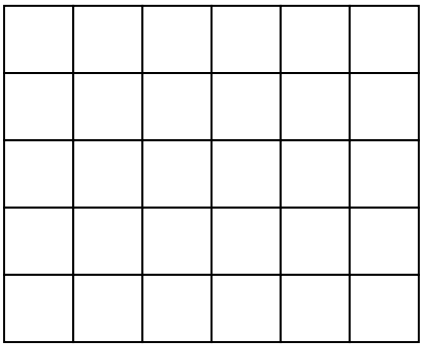
על כל שחקן בתורו להשחיר זוג משבצות צמודות.

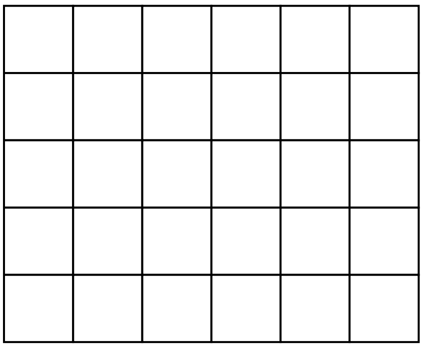
ניצחון במשחק:

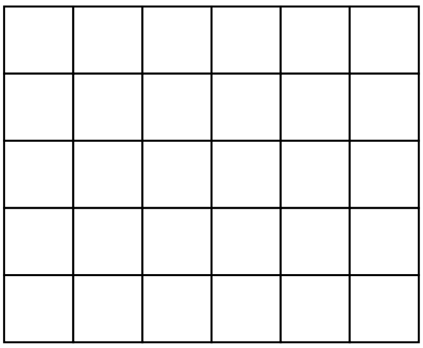
השחקן האחרון המצליח לבצע מהלך במשחק מנצח.

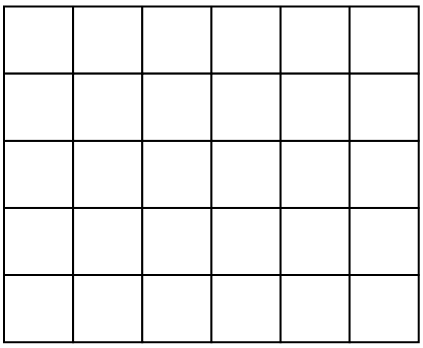








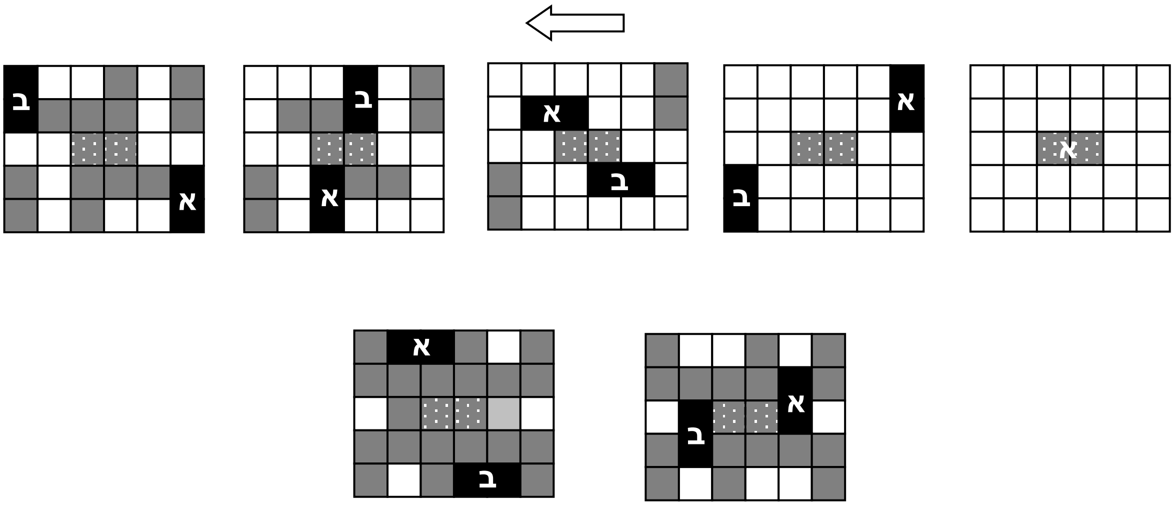




לוח 5×6 – ניתוח המשחק

במשחק הזה אסטרטגיית הניצחון היא של השחקן הראשון. במהלך הראשון תופס השחקן הזה את מרכז הלוח, ולאחר מכן כל תגובה שלו היא בסימטרייה של 180^0 למהלך של יריבו – ממש כמו בחידה הידועה מן המבוא.

הנה משחק לדוגמה:



תורו של שחקן ב' לשחק, ולכן הוא המפסיד.

כעת הגענו למשחק השלישי בשיעור. המשחק הזה משוחק על לוח 55[a], והוא בעל חוקים זהים לשני קודמיו. למרבה ההפתעה, האסטרטגיות ששימשו אותנו בשני המשחקים הקודמים אינן מתאימות למשחק הזה. יתר על כן לא נציג בו אסטרטגיית ניצחון, אלא רק דרכי התבוננות על המשחק. מי שיגלה אסטרטגיית ניצחון מלאה במשחק הזה, מוזמן לשלוח אותה אלינו - למרכז הישראלי למצוינות בחינוך.

משחק שלישי – לוח 5×5

מהלך המשחק:

על כל שחקן בתורו להשחיר זוג משבצות צמודות.

ניצחון במשחק:

השחקן האחרון המצליח לבצע מהלך במשחק מנצח.

לוח 5×5 – ניתוח המשחק

בלוח 6×6 הייתה לשחקן השני אסטרטגיית ניצחון ברורה. בלוח 6×5 הייתה לשחקן הראשון אסטרטגיית ניצחון ברורה.

בלוח ${}^{a}55$ אסטרטגיית המשחק מורכבת. המשבצת במרכז הלוח "שוברת" את הסימטרייה. אילו השחקן הראשון היה יכול לכסות במהלך הראשון רק משבצת אחת, אזי הוא גם היה יכול לכסות את המשבצת במרכז, ומכאן להגיב על כל מהלך של יריבו במהלך סימטרי ב- 180^0.

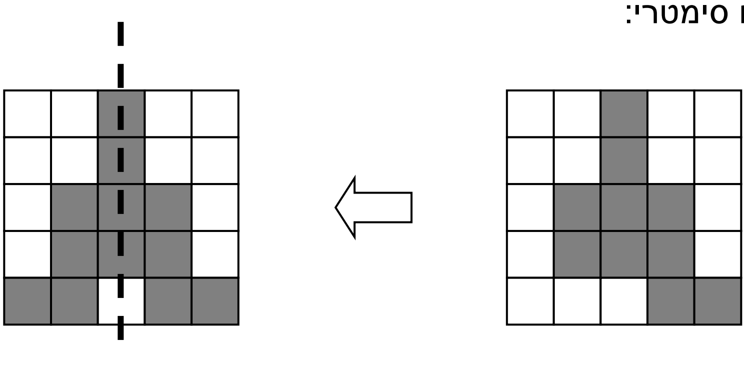
כמו כן אילו השחקן הראשון היה "מבטיח" ליריבו שאינו מכסה בשום מהלך את משבצת המרכז, הרי שהשחקן השני היה יכול להגיב על כל מהלך של השחקן הראשון במהלך סימטרי ולנצח. מובן שהשחקן הראשון לא ייתן ליריבו הבטחה כזו.

אפשרו לתלמידים לשחק כרצונם במשחק, ובדקו אם גילו אפילו מקצת מן המרכיבים לאסטרטגיות במשחק.

נציג כעת שני מצבי משחק שבהם יכול אחד מן השחקנים לבצע מהלך שיבטיח לו ניצחון.

א. ניצול הזדמנות ליצירת מצב סימטרי כדי לנצח

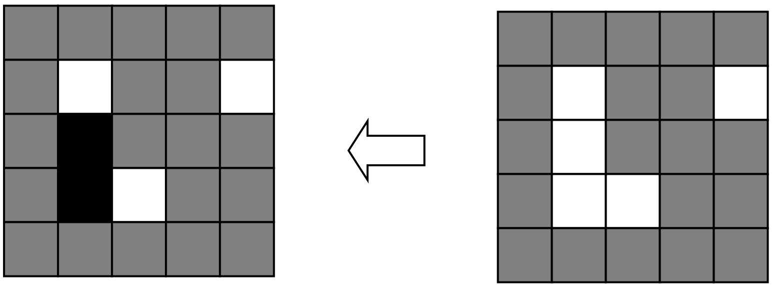
ייתכן שבשלב מסוים נוצר במשחק מצב המאפשר לשחקן שתורו לשחק להשאיר ליריבו לוח סימטרי:



כעת יכול השחקן שביצע את המהלך האחרון להגיב בצורה סימטרית על מהלכיו של היריב ולנצח. הסימטרייה היא יחסית לקו האנכי המקווקו ששרטטנו.

ב. ניצחון במצב משחק מתקדם

אמנם בהתחלת המשחק לא קל "לתכנן קדימה", מה שגורם לכך שתלמידים רבים משחקים מהר בשלב הזה, אך לקראת סיום המשחק קל יותר לבצע תכנון כזה, והשחקנים מאטים את הקצב; בשלב מסוים מזהה אחד מן השחקנים הזדמנות לניצחון. הנה דוגמה למצב לקראת סיום שבו לא קשה למצוא מהלך מנצח:

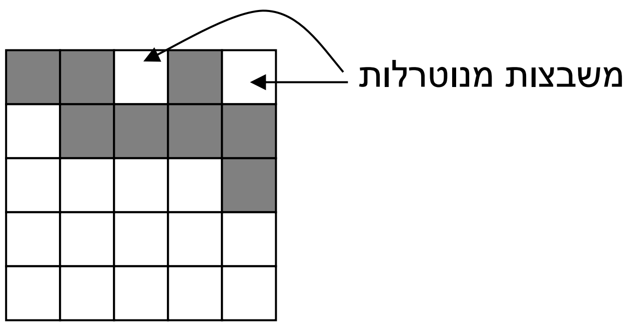


חשוב להבין שככל שמתכננים בשלב מוקדם יותר, כך רמת המשחק של המתכנן גבוהה יותר.

נציג כעת הסתכלות על המשחק שייתכן שכדאי לשחקנים להתייחס אליה.

משבצות מנוטרלות

בלוח 5×5 יש 25 משבצות. מאחר שבכל תור השחקן צריך להשחיר 2, ייתכנו לכל היותר 12 מהלכים כאשר לפחות משבצת אחת של הלוח לא תנוצל. אם אכן יתממשו 12 מהלכים, הרי שכל שחקן יבצע 6 מהלכים. במקרה הזה ברור כי השחקן השני ינצח במשחק. עם זאת השחקנים יכולים ליצור במהלכיהם משבצות מנוטרלות רבות. הנה דוגמה:



אם השחקן הראשון מצליח לנטרל 3 משבצות, הרי שבמשחק יכוסו 22 משבצות, ולכן יהיו בו רק 11 מהלכים. כיוון ש- 11 הוא מספר אי־זוגי, הרי שהשחקן הראשון ינצח. בהסתכלות הזאת השחקנים יכולים לנסות ולכוון לעצמם את מספר המשבצות המנוטרלות שיתאים לניצחונם.